Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di laurea magistrale

Gruppi Interpretabili in (Z,+)

Candidato:
Giuseppe Iarlori
Matricola 462373

Relatore:
Alessandro Berarducci

Correlatore:
Giovanni Gaiffi

Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione

Il generale ambiente nel quale il lavoro svolto in questa tesi trova collocazione è il ramo della Logica Matematica chiamato Teoria dei Modelli. Gli oggetti di studio principali di questa materia vengono chiamati *strutture*. Fra queste vi sono ad esempio le strutture algebriche come gruppi, anelli e spazi vettoriali o le strutture d'ordine come i reticoli e gli ordini lineari. In generale possiamo pensare ad una struttura come ad una successione $(M, \ldots)$ possibilmente infinita, dove il primo termine M rappresenta un insieme e in luogo dei puntini vi possono essere singoli elementi di M (costanti), funzioni o relazioni definiti su prodotti cartesiani di M. La principale classe di strutture che prendiamo in considerazione sono i gruppi. Un gruppo $(G, 1_G, \cdot, ()^{-1})$ è una struttura costituita da un insieme G, un elemento $1_G \in G$ (l'unità del gruppo) e dalle funzioni per il prodotto e per gli inversi (spesso i simboli dell'unità e della funzione per gli inversi vengono omessi dalla scrittura). Ad ogni struttura M è associata una segnatura L ed un insieme di L-formule attraverso le quali si costruiscono gli insiemi definibili in M (le definizioni si trovano nel Paragrafo 1.1). Ad esempio il centro di un gruppo G è un sottoinsieme definibile in G e coincide con l'insieme $C(G) = \{g \in G : \forall x \in G(x \cdot g = g \cdot x)\}$. Le problematiche affrontate in questa tesi ruotano intorno alle *interpretazioni* fra strutture. L'idea di interpretazione viene da lontano. Per una prima intuizione si può pensare all'introduzione apportata da Cartesio nel diciassettesimo secolo di un sistema di coordinate nello spazio Euclideo che permette di identificare ogni punto dello spazio con una terna di numeri reali. In effetti, date due strutture M, N, un'interpretazione di N in M consiste in un certo senso, nella costruzione in M di un "sistema di coordinate" per N. In particolare un'interpretazione di un gruppo G in una struttura M consiste di una funzione suriettiva $f : \tilde{G} \to G$, dove $\tilde{G} \subseteq M^n$ è un sottoinsieme definibile in M (insieme delle coordinate) tale che esistano due formule $\phi_=$ e ϕ_p, la prima che identifichi le n-uple in $\tilde{G}$ che sono coordinate di uno stesso punto di G, la seconda che in qualche modo definisca l'operazione di G sulle coordinate (Definizione 1.2.2 ed Esempio 1.2.4).

L'obbiettivo principale di questo lavoro consiste nel caratterizzare i gruppi interpretabili nella struttura additiva degli interi $(\mathbb{Z}, +)$. Per comprendere il problema si può osservare che ad esempio, se indichiamo con $(\mathbb{Q}, +)$ il gruppo additivo dei numeri razionali otteniamo che $(\mathbb{Q}, +)$ è interpretabile nell'anello degli interi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Invece uno dei risultati presenti in questa tesi stabilisce che $(\mathbb{Q}, +)$ non è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ (Corollario 3.3.5). Il primo passo nello studio del nostro problema consiste nell'osservare che ogni gruppo abeliano finitamente generato è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. Questo perchè, dal teorema di struttura, ogni gruppo abeliano finitamente generato è isomorfo ad un prodotto finito di gruppi ciclici e la costruzione di un'interpretazione per tali gruppi è immediata. Il primo esempio di gruppi non banali (in generale non commutativi) che si interpretano nella struttura additiva degli interi è dato dai *Gruppi Cristallografici*, cioè i gruppi di simmetria dei cristalli nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ (Definizione 1.5.1). Una caratterizzazione in termini astratti di tali gruppi è fornita dal seguente teorema (Teorema 1.5.3):

Teorema. *Un gruppo astratto G è isomorfo ad un gruppo cristallografico se e solo se G contiene un sottogruppo abeliano libero di rango n, normale, di indice finito ed inoltre massimale abeliano.*

In generale, diciamo che un gruppo G è un'*estensione finita* di un gruppo H se H è un sottogruppo normale e di indice finito in G. La stessa dimostrazione ottenuta per i gruppi cristallografici permette più in generale di concludere che (Corollario 1.3.8):

Fatto. *Ogni estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.*

Il resto del lavoro presente in questa tesi è dedicato a provare che, in effetti, questi sono gli unici casi, come stabilito dal risultato che qui riportiamo (Teorema 3.3.4):

Teorema. *Un gruppo G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ se e solo se G è isomorfo ad un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato.*

A differenza di quanto descritto fin'ora provare la condizione necessaria nel Teorema 3.3.4 non è affatto semplice. Otteniamo questo risultato come un'applicazione di un risultato di natura più generale ad opera di David Evans, Anand Pillay e Bruno Poizat presentato in un articolo del 1990 dal titolo "A Group in a Group". Il risultato in questione è il Teorema 1 in [7] che noi riportiamo in questa tesi nella versione che segue (Teorema 3.3.2):

Teorema. *([7]) Sia H un gruppo tale che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal. Sia G un gruppo interpretabile in H. Allora G ha un sottogruppo definibile di indice finito, definibilmente isomorfo a un quoziente A/B dove A, B sono sottogruppi definibili di H^n.*

Per dimostrare questo teorema vengono utilizzati strumenti molto sofisticati che richiedono la costruzione di un complesso apparato teorico. Riportiamo una frase di commento estratta dalla prima pagina di questo articolo:

> Our first proof has undergone drastic simplifications which have reduced it to almost nothing, but at the price of an increase of the weight of its technical apparatus...

Le tecniche a cui si fa riferimento sono il frutto di una lunga serie di lavori che si sono susseguiti a partire dali anni '70. L'obbiettivo che ci proponiamo in questa tesi è quello di ricostruire, attingendo dalle varie fonti, l'apparato teorico e tecnico necessario. Così facendo forniamo un percorso coerente ed organico che, partendo dalle nozioni di base della teoria dei modelli, riesca a condurre il lettore verso la comprensione della dimostrazione in questione. Riassumiamo qui di seguito i risultati principali.

La definizione di interpretazione sopra descritta non è facilmente utilizzabile per escludere la possibilità che un determinato gruppo sia interpretabile in una struttura M. È necessario quindi guardare alle interpretazioni da una diversa prospettiva. Se un gruppo G risulta definibile in M (Definizione 2.2.10), allora G è interpretabile in M. In generale il viceversa non è vero. Nel Paragrafo 2.2 mostriamo com'è possibile generalizzare la nozione di definibilità in M introducendo l'espansione degli *immaginari* M^{eq}. In particolare otteniamo (Teorema 2.2.11):

Teorema. *Sia G un gruppo interpretabile in una struttura M. Allora esiste un gruppo isomorfo a G definibile in M^{eq}.*

Intuitivamente M^{eq} si ottiene da M aggiungendo insiemi quozienti per relazioni di equivalenza definibili della forma M^n/E. Il gruppo isomorfo a G del teorema di sopra è definito sull'insieme quoziente $M^n/\phi_=$, dove $\phi_=$ identifica le n-uple che sono coordinate di uno stesso punto. Il problema è quindi ricondotto a studiare i gruppi definibili in $(\mathbb{Z}, +)$ e nella relativa espansione degli immaginari $\mathbb{Z}^{eq}$.

Il primo passo per cercare di capire quali gruppi possono essere definiti in una struttura M, è quello di capire che tipo di insiemi si possono definire in M e più in generale in un modello della sua teoria $Th(M)$ (le definizioni si trovano nelle prime pagine del Paragrafo 1.1). Nel Paragrafo 2.5 presentiamo un classico teorema di struttura per gli insiemi definibili in $(\mathbb{Z}, +)$ e più in generale in un R-modulo H su qualche anello R, noto come *Bauer-Monk quantifier elimination theorem* (Teorema 2.5.4). In base a questo risultato otteniamo:

Fatto. *Se R è un anello e se H è un R-modulo (destro o sinistro), allora ogni insieme definibile in H è una combinazione booleana finita di classi laterali di sottogruppi definibili di H^n.*

Ad esempio ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}^n$ definibile in $\mathbb{Z}$ con la sola operazione di somma è combinazione booleana finita di classi laterali di sottogruppi di $\mathbb{Z}^n$. Questo risultato è molto importante per la dimostrazione del teorema in [7] che in effetti è una conseguenza del teorema di Bauer e Monk sull'eliminazione dei quantificatori.

In realtà questa conseguenza non è così diretta. Il primo problema che ci si trova ad affrontare è che quello di Bauer-Monk è un teorema di struttura per $\mathbb{Z}$ e noi siamo interessati alla definibilità in $\mathbb{Z}^{eq}$. Il punto è che non è vero che ogni insieme definibile in $\mathbb{Z}^{eq}$ è combinazione booleana finita di classi laterali di sottogruppi (tanto che $\mathbb{Z}^{eq}$ non è neanche un gruppo). Occorre quindi generalizzare il teorema di struttura di Bauer e Monk. Se M è una struttura, indichiamo con $\bar{M}$ il *monster model* di $Th(M)$. Questo modello gode di particolari proprietà di *saturazione* che ci permettono, restringendo il nostro studio ad insiemi e modelli di cardinalità "piccola", di considerare $\bar{M}$ come universo in cui lavorare (l'esistenza di questi modelli è discussa nel Paragrafo 2.1). L'idea è quella di immergere M nel monster model $\bar{M}$ e studiare la definibilità in $\bar{M}$ e più in generale nell'espansione degli immaginari $\bar{M}^{eq}$ attraverso particolari gruppi di *automorfismi* di $\bar{M}$, seguendo così un approccio che può essere pensato come una generalizzazione della teoria di Galois per le equazioni algebriche. Nel Paragrafo 2.2 descriviamo precisamente le idee e le tecniche di questo approccio alla definibilità. Osserviamo qui che il gruppo $Aut(\bar{M})$ agisce per traslazione sugli insiemi definibili in $\bar{M}$. Se indichiamo con a una n-upla di parametri in $\bar{M}$ e se X è un insieme definito da una formula $\phi(x, a)$ allora, per ogni $\alpha \in Aut(\bar{M})$, $\alpha(X)$ è l'insieme definito dalla formula $\phi(x, \alpha(a))$. Nel Paragrafo 2.4 introduciamo l'importante nozione di teoria *Weakly Normal*. Un insieme definibile $X \subseteq \bar{M}$ si dice Weakly Normal se ogni successione infinita di coniugati di X sotto l'azione di $Aut(\bar{M})$, a due a due distinti, ha intersezione vuota. Se si riesce a dare un teorema di struttura per gli insiemi definibli nei modelli di una teoria T attraverso insiemi definibili Weakly Normal, allora si dice che T è una teoria Weakly Normal. Più precisamente:

Definizione. *Una teoria T si dice Weakly Normal se ogni insieme definibile nel monster model $\bar{M}$ è combinazione booleana finita di insiemi definibili Weakly Normal.*

Dato che due classi laterali di un sottogruppo sono disgiunte o coincidono, ogni classe laterale di un sottogruppo è un insieme Weakly Normal.

Quindi il teorema di Bauer-Monk stabilisce che ogni insieme definibile in un R-modulo è combinazione booleana finita di insiemi Weakly Normal. In particolare $Th(\mathbb{Z}, +)$ è una teoria Weakly Normal. Questa nuova formulazione ci permette di ottenere un teorema di struttura per gli insiemi definibili nell'espansione degli immaginari $\mathbb{Z}^{eq}$. In generale se M è una struttura, indichiamo con T^{eq} la teoria completa di M^{eq}. Si dimostra che (Corollario 2.4.29):

Fatto. *Se una teoria T è Weakly Normal allora T^{eq} è Weakly Normal.*

Queste proprietà ci permettono già di imporre una prima "limitazione" sulla complessità della struttura di un gruppo interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. Infatti (Teorema 3.2.8):

Fatto. *Ogni gruppo definibile all'interno di una teoria Weakly Normal è virtualmente abeliano, cioè ha un sottogruppo abeliano di indice finito.*

Questo è un primo passo ma non è sufficiente in quanto come già osservato $(\mathbb{Q}, +)$ non è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ e certamente è virtualmente abeliano (in quanto è abeliano). Intuitivamente, il problema è che $\mathbb{Z}$ con la sola operazione di somma non è in grado di definire "cose" troppo complicate e, in generale, vale la stessa cosa per ogni struttura che gode dell'eliminazione dei quantificatori tramite formule Weakly Normal.

A questo punto occorre indebolire la generale condizione di definibilità di un gruppo G in una struttura M e introdurre la nozione di gruppo type-definibile in M. Intuitivamente l'insieme sostegno e l'operazione di G non sono dati più da singole formule ma da collezioni infinite coerenti di formule (si può guardare l'inizio del Paragrafo 3.1). La dimostrazione del teorema in [7] consiste sostanzialmente nel provare che se G è un gruppo interpretabile nel gruppo H tale che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal, allora esistono dei sottogruppi type-definibili $L \leq \bar{H}^n$ e $G_0 \leq \bar{G}$ e un omomorfismo suriettivo $\bar{f} : L \to G_0$. Poi tramite ragionamenti di compattezza si riesce a risalire ad un omomorfismo $f : A \to G'$, dove $A \leq H^n$ e $G' \leq G$ ha indice finito, e con questo il teorema è provato. Occorre quindi avere appropriati strumenti per maneggiare questa tipologia di gruppi. Questi strumenti, noti come *teoria dei tipi generici per spazi omogenei*, vengono costruiti attraverso lo studio dei *tipi* di una teoria, cioè collezioni coerenti, possibilmente infinite, di formule (Definizione 2.1.1 e successivi).

Buona parte del Capitolo 2 è dedicato a fornire una caratterizzazione delle teorie Weakly Normal attraverso lo studio dei tipi di queste teorie. Sia T una teoria completa e sia $\bar{M}$ il monster model di T. Indichiamo con $S(A)$ l'insieme dei tipi completi di T con parametri in $A \subseteq \bar{M}$. Osserviamo che l'insieme delle formule con parametri in A ha cardinalità $|T| + |A|$. Quindi, a priori, un limite per la cardinalità di $S(A)$ può essere $2^{|T|+|A|}$. Sia λ un cardinale infinito. Diciamo che T è λ-*stabile* se per ogni $A \subseteq \bar{M}$ tale che $|A| < \lambda$ risulta $|S(A)| < \lambda$. Diciamo che T è *stabile* se esiste un cardinale infinito λ tale che T è λ-stabile. Lo studio delle teorie stabili copre una larga parte della Teoria dei Modelli, chiamata appunto "Stability Theory". Se G è un gruppo abeliano e più in generale un modulo, allora $Th(G)$ è una teoria stabile. Quindi la nostra teoria $Th(\mathbb{Z}, +)$ è stabile. Per una teoria che non è stabile si può considerare ad esempio $Th(\mathbb{Z}, <)$ dove $(\mathbb{Z}, <)$ è l'ordine usuale degli interi. Intuitivamente si può pensare ad una teoria stabile come ad una teoria che non è in grado di definire un ordine infinito nei suoi modelli. Il risultato che ci interessa è il seguente (Teorema 2.4.20):

Teorema. *Ogni teoria Weakly Normal è stabile.*

All'interno di una teoria stabile si può definire una generale nozione di base per i tipi. Il gruppo $Aut(\bar{M})$ agisce per traslazione sui tipi "globali" in $S(\bar{M})$, cioè i tipi completi con parametri nel monster model $\bar{M}$. Se α è un automorfismo di $\bar{M}$ e se $p \in S(\bar{M})$ allora $\alpha(p)$ è per definizione il tipo completo su $\bar{M}$ che contiene tutte le formule della forma $\phi(x, \alpha(a))$ al variare di $\phi(x, a)$ in p. Diciamo che un insieme C è una *base* per il tipo $p \in S(\bar{M})$ se per ogni automorfismo α di $\bar{M}$, $\alpha(p) = p$ se e solo se α fissa C puntualmente. Grazie all'ipotesi di stabilità riusciamo a costruire una base per ogni tipo $p \in S(\bar{M})$ che chiamiamo *base canonica* ed indichiamo con $Cb(p)$ (Definizione 2.4.2). Notiamo che sussiste una certa simmetria tra la nozione di definibilità per insiemi precedentemente descritta e quella di base canonica per i tipi globali in $S(\bar{M})$. In effetti si può dare una nozione di definibilità anche per i tipi (Definizione 2.3.4) e questa può essere descritta tramite la base canonica. Più precisamente, se indichiamo con $dcl^{eq}(A)$ l'insieme di tutti gli immaginari in $\bar{M}^{eq}$ che sono definibili su A, per $A \subseteq \bar{M}$, allora risulta (Lemma 2.4.4):

Fatto. *$p \in S(\bar{M})$ è definibile su A se e solo se $Cb(p) \subseteq dcl^{eq}(A)$.*

Tramite le proprietà di definibilità sopra descritte per i tipi globali sul monster model $\bar{M}$ della teoria stabile T, riusciamo a definire in $\bar{M}$ una generale nozione di indipendenza tra elementi e insiemi chiamata relazione di *forking*. Questa può essere pensata come una generalizzazione nel contesto stabile della relazione di "indipendenza lineare" negli spazi vettoriali e della "indipendenza algebrica" nella teoria dei campi algebricamente chiusi. La relazione di forking si esprime in modo equivalente come relazione fra tipi e insiemi oppure fra estensioni di tipi. Nel primo caso si dice che un tipo p è non-forking su un insieme A. Nel secondo caso si dice che un'estensione di tipi $p \subseteq q$ è un'estensione non-forking (Definizione 2.3.25). In particolare, se $A \subseteq \bar{M}$ allora risulta (Lemma 2.4.3):

Fatto. *$p \in S(\bar{M})$ è non-forking su A se e solo se $Cb(p) \subseteq acl^{eq}(A)$.*

Si definisce anche una relazione di forking tra formule e insiemi (Definizione 2.3.24). In particolare, se ϕ è una formula ed A un insieme, tale relazione sarà espressa dicendo che ϕ è non-forking su A. Indichiamo con $tp(a/A)$ il tipo completo di a su A (si può guardare l'inizio del Paragrafo 2.1). Le principali proprietà che cerchiamo nelle estensioni non-forking possono essere così riassunte:

- (Esistenza) Sia $p \in S(A)$ e sia M un modello contenente A. Allora p ha un'estensione non-forking ad un tipo completo su M.
- (Carattere finito) Siano $A \subseteq B$ e $p \in S(B)$. Allora p è non-forking su A se e solo se ogni formula $\phi \in p$ è non-forking su A.
- (Transitività) Siano $A \subseteq B \subseteq C$ e $p \in S(C)$. Allora p è non-forking su A se e solo se p è non-forking su B e $p \restriction B$ è non-forking su A.
- (Simmetria) Per ogni a, b, A, $tp(a/A \cup \{b\})$ è non-forking su A se e solo se $tp(b/A \cup \{a\})$ è non-forking su A.

La relazione di forking permette di definire nella teoria stabile T, la nozione di indipendenza cercata (Definizione 2.3.27):

Definizione. *Un elemento a è indipendente da B su A se $tp(a/B \cup A)$ è un'estensione non-forking di $tp(a/A)$.*

In generale, dato un tipo $p \in S(A)$, abbiamo un limite per il numero di estensioni non-forking su di un insieme $B \supseteq A$ ed è precisamente $2^{|T|}$. In alcuni casi, tuttavia, p ha la propietà di avere un'unica estensione non-forking su ogni insieme $B \supseteq A$. Un tipo con questa proprietà si chiama *tipo stazionario*. Questi tipi sono molto importanti per il nostro studio in quanto ci permettono di ampliare la nozione di base data per i tipi globali in $S(\bar{M})$. Se $p \in S(A)$, allora p ha un'unica estensione non-forking ad un tipo $p' \in S(\bar{M})$. Possiamo quindi definire $Cb(p) = Cb(p')$. Se p è un tipo stazionario su A, una *successione di Morley* per p è definita come segue: ogni elemento della successione realizza l'unica estensione non-forking di p sull'insieme costituito da A e dagli elementi che lo precedono. Allora $Cb(p)$ è contenuta nell'insieme degli immaginari in $\bar{M}^{eq}$ che sono definibili su una successione di Morley per p (Lemma 2.4.6). Per questo motivo diciamo che la base canonica di p è determinata da una successione di Morley per p. La teoria stabile T è detta *1 based* se la base canonica di ogni tipo stazionario in $\bar{M}^{eq}$ è determinata dal primo elemento di una successione di Morley per p: per ogni a, A in $\bar{M}^{eq}$ tali che $p = tp(a/A)$ è stazionario risulta $Cb(p) \subseteq acl^{eq}(a)$ (Definizione 2.4.11).

Questa condizione (piuttosto tecnica) sulle basi per i tipi stazionari, corrisponde ad una precisa configurazione di oggetti chiamati *geometrie*, che si possono definire su insiemi detti *Strongly Minimal* definibili all'interno di particolari teorie stabili, dette teorie *totalmente trascendenti.* Nel Paragrafo 2.6 analizziamo questi aspetti, anche se non necessari per lo sviluppo del lavoro, per fornire un'idea intuitiva della proprietà 1 based per i tipi stazionari. Il risultato più importante del Capitolo 2 permette di ottenere la caratterizzazione per le teorie Weakly Normal cercata. In particolare risulta (Teorema 2.4.28):

Teorema. *Una teoria T è Weakly Normal se e solo se T è stabile e 1 based.*

Nel Capitolo 3 applichiamo questi risultati per studiare i gruppi che sono definibili o type-definibili nel monster model di una teoria Weakly Normal. Gli oggetti di studio principali in questo capitolo si chiamano *spazi omogenei principali.* Per noi uno spazio omogeneo è una coppia (G, V), dove G e V sono rispettivamente un gruppo e un insieme type-definibili nel monster model $\bar{M}$ di una teoria Weakly Normal T, tali che risulti definita un'azione transitiva di G su V. Uno spazio omogeneo si dice principale se l'azione è regolare. Fissiamo una teoria Weakly Normal T e indichiamo con $\bar{M}$ il monster model di T. Gli spazi omogenei principali coinvolti nello studio del nostro problema sono sostanzialmente di due tipi:

- (G, G) dove G è un gruppo type-definibile in $\bar{M}$ e l'azione è data dalla moltiplicazione (destra o sinistra);
- $(H, H \cdot a)$ dove H è un sottogruppo type-definibile di un gruppo G type-definibile in $\bar{M}$, $H \cdot a$ è una classe laterale destra di H in G e l'azione è data dalla moltiplicazione a sinistra.

Dato uno spazio omogeneo (G, V) siamo interessati a studiare i sottoinsiemi relativamente definibili di V e i tipi di T che estendono il tipo parziale "$x \in V$". Il gruppo G agisce per "traslazione" su tali tipi. Diciamo che un sottoinsieme relativamente definibile X di V è *generico* in V per l'azione di G se un numero finito di traslati di X sotto l'azione di G copre V. Ad esempio, ogni sottogruppo H di indice finito in G è un particolare insieme generico per lo spazio (G, G). Diciamo che un tipo p che estende "$x \in V$" è generico in V se ogni formula in p definisce un sottoinsieme generico di V. Lo studio dei tipi generici può essere affrontato per mezzo della teoria del forking. In particolare, per un tipo $p \in S(\bar{M})$ che estende V, risulta (Lemma 3.1.7):

Fatto. *p è generico in V se e solo $\forall g \in G$, $g \cdot p$ è non-forking sul $\emptyset$.*

La teoria dei tipi generici per spazi omogenei fornisce lo strumento principale attraverso il quale Evans, Pillay e Poizat provano il risultato in [7].

Tutto il lavoro presente nella tesi converge nel Paragrafo 3.3, nel quale presentiamo la dimostrazione del teorema in [7] e mostriamo (nel Teorema 2.2.11) come esso si applica per caratterizzare i gruppi interpretabili in $(\mathbb{Z}, +)$.

Capitolo 1

Intepretare estensioni finite

Questo capitolo è interamente dedicato alle interpretazioni fra strutture. Inizialmente vengono fornite le definizioni di strutture e teorie del primo ordine e la definizione di interpretazione fra strutture. In seguito ci si pone il seguente problema: supponiamo di avere un gruppo G, magari anche con altri simboli di relazione o funzione. Supponiamo che G contenga un sottogruppo H normale e di indice finito e supponiamo di sapere che H è interpretabile in una struttura M. Quello che vogliamo è capire sotto quali condizioni sui gruppi G ed H, sia possibile concludere che anche G è interpretabile in M. In altre parole, si vuole capire sotto quali condizioni un'interpretazione di un gruppo H in una struttura M, si "estende" ad un'interpretazione in M di una sua estensione finita G (usiamo il termine estensione finita per indicare che un gruppo ha un sottogruppo normale di indice finito, seguendo la notazione in [9]).

La risposta che diamo a questo quesito è parziale. Prendiamo in considerazione sostanzialmente due casi. Nel Paragrafo 1.3 assumiamo che G ed H siano gruppi astratti generici ma considerati interamente nel puro linguaggio dei gruppi. In questo caso, la risposta al quesito è affermativa sotto particolari condizioni di definibilità sugli automorfismi di H. Nel Paragrafo 1.4 prendiamo invece in considerazione il caso abeliano e, più in generale, il caso in cui H sia un sottomodulo di un R-modulo G (su di un generico anello R). Per queste classi di strutture non ci sono problemi e le interpretazioni "passano" sempre ad estensioni finite.

Anche se non esaustiva e completa, la nostra trattazione ci permette comunque di trarre alcune conclusioni. Infatti, se consideriamo la struttura additiva degli interi $(\mathbb{Z}, +)$, otteniamo:

- ogni *gruppo cristallografico* è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$;

- ogni estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.

Ribadiamo che il secondo punto di sopra significa che, se G è un gruppo (possibilmente non commutativo), tale che G ha un sottogruppo abeliano finitamente generato e di indice finito, allora G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.

Le tecniche utilizzate per le dimostrazioni di questi risultati sono state "estrapolate" dal lavoro di Berarducci, Peterzil e Pillay in [11]. Quindi anche se non direttamente collegato, consideriamo quest'articolo come riferimento principale per questo capitolo. Come generali referenze per i paragrafi riguardanti le definizioni di base segnaliamo [2] e [12].

1.1 Nozioni di base

In questo paragrafo diamo le definizioni basilari di Strutture e Teorie del prim'ordine, nonchè le definizioni delle principali strutture con cui lavoreremo in seguito (gruppi, anelli, campi e moduli). Inoltre, enunciamo i teoremi di compattezza e di Lowenheim-Skolem, con alcune conseguenze.

Un **linguaggio del primo ordine** L è costituito da un insieme di simboli, detti segnatura del linguaggio, e da un insieme di L-formule (le L-formule del primo ordine). I simboli della segnatura si dividono in simboli di costante, relazione e funzione. Ad ognuno di essi è associato un numero naturale detto arietà del simbolo (ogni simbolo di costante ha arietà 0). Inglobiamo sempre nel linguaggio un altro insieme di simboli contenenti i connettivi booleani $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$, i simboli di quantificazione $\forall, \exists$, le parentesi e un insieme infinito di variabili $x, y, z, \ldots$. Definiamo induttivamente l'insieme degli **L-termini** come il più piccolo insieme di espressioni tali che:

- ogni variabile x è un L-termine;

- ogni simbolo di costante in L è un L-termine;

- se f è un simbolo di funzione in L di arietà n e $t_1, \ldots, t_n$ sono L-termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un L-termine.

Allo stesso modo si definiscono le **L-formule** del primo ordine come il più piccolo insieme di espressioni tali che:

- se t_1, t_2 sono L-termini, allora $t_1 = t_2$ è una L-formula;

- se R è un simbolo di relazione in L di arietà n e se $t_1, \ldots, t_n$ sono L-termini, allora $R(t_1, \ldots, t_n)$ è una L-formula;

- se ϕ, ψ sono L-formule, allora $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi)$ sono L-formule;
- se ϕ è una L-formula, allora $\exists x\phi$ e $\forall x\phi$ è una L-formula.

Se L è un linguaggio del primo ordine, con abuso di notazione indicheremo con L sia la sua segnatura che l'insieme delle L-formule. Le formule della forma $t_1 = t_2$ e $R(t_1, \ldots, t_n)$, dove i t_i sono L-termini e R è un simbolo di relazione, vengono dette **L-formule atomiche**.

Una **L-struttura** M è una coppia costituita da un insieme $dom(M)$ e da una funzione che associa ad ogni simbolo di costante di c di L un elemento $c^M \in dom(M)$, ad ogni simbolo di funzione f di arietà n in L una funzione $f^M : dom(M)^n \rightarrow dom(M)$ e ad ogni simbolo di relazione R di arietà n in L una relazione $R^M \subseteq dom(M)^n$. Con abuso di notazione indicheremo con M sia la struttura che il suo dominio.

Esempio 1.1.1. Definiamo le principali classi di strutture che studieremo in seguito.

1. *Gruppi.* Ogni gruppo G può essere visto come una struttura nella segnatura L= $\{1, \cdot, inv(-)\}$ dove i simboli 1 e $\cdot$ vengono interpretati rispettivamente come unità e prodotto e $inv(-)$ è la funzione che associa ad ogni elemento il suo inverso.

2. *Anelli e Campi.* Un anello, così come un campo, può essere visto come struttura in modo del tutto simile a un gruppo considerando la segnatura L= $\{0, 1, +, \cdot, -, inv(-)\}$ dove il simbolo $-$ è usato per l'inverso "additivo" e $inv(-)$ per quello "moltiplicativo".

3. *Moduli.* Sia R un anello. Il modo canonico per vedere un R-modulo M come struttura è considerare una segnatura L costituita da:

   - i simboli L'=$\{0, +, -\}$ del linguaggio dei gruppi (espresso in notazione additiva),
   - un simbolo di funzione f_r per *ogni* elemento $r \in R$.

   I simboli in L' vengono interpretati come nei gruppi. Ogni simbolo f_r viene interpretato come la funzione che ad ogni $x \in M$ associa il prodotto "scalare" $x \cdot r$. In altre parole, ogni f_r rappresenta l'omotetia di rapporto r, destra o sinistra a seconda dei casi.

Siano L un linguaggio del primo ordine e M una L-struttura. Una **L-formula con parametri** in M è ottenuta da una L-formula sostituendo ad alcune sue variabili libere degli elementi di M. Osserviamo che è possibile dare una definizione precisa di sostituzione (si può consultare [12]); intuitivamente sostituire un elemento m al posto di una variabile x vuol dire scrivere la lettera m al posto di x in ogni occorrenza libera di x (un'occorrenza legata di una variabile è una sottoformula in cui x appare preceduta da una quantificazione, un'occorrenza libera è un'occorrenza non legata). Se i parametri nella formula sono inclusi in un sottoinsieme A di M, si dice che la formula è con parametri in A.

Un L-termine si dice chiuso se non contiene variabili. Se M è una L-struttura allora M interpreta ogni L-termine chiuso, cioè è definita una funzione che ad ogni L-termine chiuso t associa un elemento $t^M \in M$ secondo le seguenti regole:

- se t è un simbolo di costante, allora t^M è lo stesso elemento che interpreta il simbolo t nella definizione di struttura;

- se supponiamo induttivamente che $t_1^M, \ldots, t_n^M$ siano interpretazioni dei termini $t_1, \ldots, t_n$ e se f è un simbolo di funzione di arietà n, allora $(f(t_1, \ldots, t_n))^M = f^M(t_1^M, \ldots, t_n^M)$.

Una L-formula ϕ si chiama L-formula chiusa o L-enunciato se ϕ non ha occorrenze libere. Introduciamo il simbolo di verità $\models$ da leggere nel seguente modo: se M è una L-struttura e se ϕ è una L-formula chiusa, $M \models \phi$ significa che ϕ è vera in M, $M \not\models \phi$ vuol dire che ϕ non è vera in M. Definiamo induttivamente il valore di verità di una L-formula chiusa in M nel seguente modo:

- $M \models t_1 = t_2$ se e solo se $t_1^M = t_2^M$;

- $M \models R(t_1, \ldots, t_n)$ se e solo se $R^M(t_1^M, \ldots, t_n^M)$;

- $M \models \phi \wedge \psi$ se e solo se $M \models \phi$ e $M \models \psi$;

- $M \models \phi \vee \psi$ se e solo se $M \models \phi$ o $M \models \psi$;

- $M \models \neg\phi$ se e solo se $M \not\models \phi$;

- $M \models \phi \rightarrow \psi$ se e solo se $M \not\models \phi$ o $M \models \psi$;

- $M \models \exists x \phi(x)$ se e solo se esiste $m \in M$, $M \models \phi(m)$;

- $M \models \forall x \phi(x)$ se e solo se per ogni $m \in M$, $M \models \phi(m)$.

Per ogni L-formula chiusa ϕ vale $M \models \phi$ oppure $M \not\models \phi$ e non sussistono le due condizioni contemporaneamente. Diciamo che una L-formula chiusa ϕ è vera in M se $M \models \phi$ (nel senso della definizione precedente). Allo stesso modo si definisce la nozione di verità in M per una formula con parametri in $A \subseteq M$.

Una **L-teoria** del primo ordine è un insieme di L-formule chiuse (enunciati). Una L-struttura M si chiama **modello** di una L-teoria T, e si scrive $M \models T$, se per ogni $\phi \in T$ risulta $M \models \phi$ (ogni formula in T è vera in M). Se M è una L-struttura poniamo $Th(M) = \{\phi \in \mathrm{L} : M \models \phi\}$. Una L-teoria si dice **completa** se per *ogni* formula $\phi \in \mathrm{L}$, ϕ è in T oppure $\neg\phi$ è in T. Chiaramente $Th(M)$ è una teoria completa e si chiama la teoria completa di M, in quanto risulta $M \models Th(M)$.

Due L-strutture M, N si dicono **elementarmente equivalenti** se risulta $Th(M) = Th(N)$, cioè se soddisfano agli stessi L-enunciati. Indichiamo con $(M, m)_{m \in M}$ la $\mathrm{L} \cup M$-struttura ottenuta aggiungendo simboli di costante per gli elementi di M.

Definizione 1.1.2. Siano M, N L-strutture.

1. Si dice che M è una sottostruttura di N e si scrive $M \subseteq N$ se:
   - per ogni costante $c \in \mathrm{L}$ risulta $c^M = c^N$;
   - per ogni funzione $f \in \mathrm{L}$ risulta $f^M = f^N \restriction M$;
   - per ogni relazione $R \in \mathrm{L}$ risulta $R^M = R^N \restriction M$.
2. Si dice che M è una sottostruttura elementare di N e si scrive $M \preceq N$ se:
   - M è una sottostruttura di N;
   - $Th((M, m)_{m \in M}) = Th((N, m)_{m \in M})$.

Equivalentemente, una sottostruttura M di N è elementare se per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n$ in M risulta:

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow N \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \ .$$

Concludiamo questa sezione enunciando il fondamentale *teorema di compattezza* per la logica del primo ordine e alcune sue conseguenze. Per le dimostrazioni si può consultare un qualunque testo di base di teoria dei modelli come [2] oppure si può guardare [14].

Un insieme Σ di L-enunciati si dice *coerente* se ha un modello, cioè se esiste una L-struttura M tale che per ogni $\phi \in \Sigma$ risulta $M \models \phi$. Un insieme Σ di L-enunciati si dice *finitamente coerente* se ogni suo sottoinsieme finito è coerente.

Teorema 1.1.3. *(Compattezza) Sia Σ un insieme di L-enunciati. Allora Σ è coerente se e solo se Σ è finitamente coerente.*

Se Σ è un insieme di L-enunciati e se ϕ è un L-enunciato si scrive $\Sigma \models \phi$ e si legge "ϕ segue logicamente da Σ" se ϕ è vero in ogni modello di Σ.

Corollario 1.1.4. *Sia Σ un insieme di L-enunciati e sia ϕ un L-enunciato tale che $\Sigma \models \phi$ (ϕ è vera in ogni modello di Σ). Allora esiste un sottoinsieme finito Σ' di Σ tale che $\Sigma' \models \phi$.*

Enunciamo infine i teoremi di Lowenheim-Skolem.

Teorema 1.1.5. *(Downward L-S.) Sia M una L-struttura di cardinalità k. Sia A un sottoinsieme dell'universo di M e sia λ un cardinale tale che $|L| + \omega + |A| \leq \lambda \leq k$. Allora esiste una sottostruttura N di M tale che:*

- $N \preceq M$;
- $A \subseteq dom(N)$;
- $|N| = \lambda$.

Sia M una L-struttura. Un'*estensione elementare* di M è una L-struttura N che $M \preceq N$.

Teorema 1.1.6. *(Upward L-S.) Sia M una L-struttura infinita. Sia $\lambda \geq |M| + |L|$. Allora M ha un'estensione elementare di cardinalità λ.*

1.2 Interpretazioni fra strutture

In questo paragrafo forniamo la definizione di interpretazione di una struttura N in una struttura M. Contestualizziamo inoltre le definizioni al caso in cui N sia un gruppo.

Diciamo che una formula atomica è **unnested** se è di una delle seguenti forme:

- $x = y$;
- $x = c$ per qualche simbolo di costante c in L;
- $f(\bar{x}) = y$ per qualche simbolo di funzione f in L;
- $R(\bar{x})$ per qualche simbolo di relazione R in L.

Diciamo che una formula è **unnested** se ogni sua sottoformula atomica è unnested.

Teorema 1.2.1. *Ogni formula è logicamente equivalente ad una formula unnested.*

Dimostrazione. E' sufficiente provare che ogni formula atomica è equivalente ad una formula unnested. Per fare ciò osserviamo ad esempio che la formula $f(g(x), y) = c$ equivale a $\exists u, w(g(x) = u \wedge f(u, y) = w \wedge w = c)$. Questo fornisce una tecnica per procedere induttivamente e sciogliere tutte le possibili composizioni. □

Definizione 1.2.2. (*Interpretazione*) Siano L, L' due segnature e siano M, M' rispettivamente L ed L' strutture. Indichiamo con $\bar{x}$ n-uple di variabili. Un'**interpretazione** n-dimensionale Γ di M' in M consiste di:

- una L-formula $\partial_\Gamma(\bar{x})$;
- una mappa che associa ad ogni L'-formula atomica unnested $\phi(y_1, \ldots, y_m)$ una L-formula $\phi_\Gamma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$;
- una funzione surgettiva $f_\Gamma : \partial_\Gamma(M^n) \to M'$ tale che per ogni L'-formula unnested $\phi(y_1, \ldots, y_m)$ e per ogni $\bar{a}_i \in \partial(M^n)$ risulta

$$M \models \phi_\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \Leftrightarrow M' \models \phi(f_\Gamma(\bar{a}_1), \ldots, f_\Gamma(\bar{a}_m)).$$

L'insieme $\partial(M^n)$ si chiama **dominio** dell'interpretazione, si dice che le L-formule ϕ_Γ **definiscono** Γ e la funzione f_Γ si chiama **mappa delle coordinate**. In questa definizione la formule che definiscono l'interpretazione e il suo universo possono essere con parametri.

Lemma 1.2.3. *Sia Γ un'interpretazione n-dimensionale di una L'-struttura M' in una L-struttura M. Allora per* ogni *L'-formula ϕ, esiste una L-formula ϕ_Γ tale che per ogni $\bar{a}_i \in \partial(M^n)$ risulta*

$$M \models \phi_\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \Leftrightarrow M' \models \phi(f_\Gamma(\bar{a}_1), \ldots, f_\Gamma(\bar{a}_m)).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.2.1 ogni L'-formula è logicamente equivalente ad una formula le cui componenti atomiche sono unnested. La tesi segue da un facile procedimento induttivo. □

Esempio 1.2.4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Allora le formule atomiche unnested di G sono della forma $(x = y), (x = 1)$ o $(x \cdot y = z)$. Osserviamo che la formula $x^{-1} = y$ è logicamente equivalente modulo la teoria dei gruppi alla formula $\exists z(x \cdot y = z \wedge z = 1)$. Quindi G è interpretabile in una L-struttura M se esiste un sottoinsieme definibile $\tilde{G} \subseteq M^n$, esistono L-formule $\phi_=, \phi_1, \phi_{molt}$ ed esiste una funzione surgettiva $f : \tilde{G} \to G$ tale che $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \tilde{G}$ risulta:

- $M \models \phi_=(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow f(\bar{a}) = f(\bar{b})$;
- $M \models \phi_1(\bar{a}) \Leftrightarrow f(\bar{a}) = 1$;
- $M \models \phi_{molt}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \Leftrightarrow f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b}) = f(\bar{c})$.

1.3 Estensioni finite di Gruppi

In questo paragrafo mostriamo che, se un gruppo H è interpretabile in una struttura M e se ogni automorfismo di H è definibile in H (o anche solo in M), allora ogni estensione finita di H è interpretabile in M (Lemma 1.3.5). Come conseguenza, otteniamo che ogni estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ (Corollario 1.3.8).

Definizione 1.3.1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Diciamo che G è un'estensione finita di H se H è un sottogruppo normale e di indice finito in G.

Sia G un'estensione finita di H e denotiamo con $K = G/H$ il quoziente (gruppo finito). Allora possiamo mettere G nella successione esatta canonica

$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \to 1$$

dove i e π denotano rispettivamente l'inclusione e la proiezione canonica. Sia

$$s : K \to G$$

un'inversa destra per π.

Osservazione 1.3.2. Notiamo che in generale s non sarà un omomorfismo e inoltre s può essere scelta come omomorfismo di gruppi se e solo se esiste un'azione di K su H che induce una struttura di prodotto semidiretto sul prodotto cartesiano $H \times K$.

Osserviamo che la sezione s definisce una mappa $K \times K \to H$ (2-cociclo)

$$(k_1, k_2) \mapsto s(k_1) \cdot s(k_2) \cdot s(k_1 k_2)^{-1} \ . \tag{1.1}$$

Inoltre s induce una funzione $\sigma : G \to H$ definita come segue: per ogni g in G esiste un unico $h_g = \sigma(g)$ in H tale che $g = h_g \cdot s(\pi(g))$. Le funzioni s, σ inducono una bigezione:

$$\alpha : G \to H \times K$$

definita da $g \mapsto (h_g, \pi(g))$ e con inversa $(h, k) \mapsto h \cdot s(k)$. A questo punto è facile definire un'operazione $*_s$ su $H \times K$ che renda α un isomorfismo.

Definiamo questo prodotto applicando α^{-1}, moltiplicando in G e riscendendo con α in $H \times K$. Possiamo esplicitare $*_s$ osservando che

$$(h_1, k_1) *_s (h_2, k_2) = (h_3, k_3) \;\Leftrightarrow\; k_3 = k_1 \cdot k_2 \quad e$$

$$h_3 = h_1 \cdot s(k_1) h_2 s(k_1)^{-1} \cdot s(k_1) s(k_2) s(k_1 k_2)^{-1} \; . \tag{1.2}$$

Denotiamo con $H *_s K$ il gruppo (isomorfo a G), $(H \times K, *_s)$. Guardando la formula (1.2), il secondo fattore a destra rappresenta, per ogni i, il coniugato di h tramite $s(k_i)$ (automorfismo di H in virtù della sua normalità in G). Tale automorfismo è certamente definibile in G. Tuttavia, a meno che $s(k_i) \in H$, non è detto che sia definibile in H.

Definizione 1.3.3. Sia H un gruppo. Un automorfismo $\alpha \in Aut(H)$ si dice definibile in H se esiste una formula $\phi(x, y)$ di H tale che per ogni $h_1, h_2 \in H$ risulta:

$$\alpha(h_1) = h_2 \; sse \; H \models \phi(h_1, h_2) \; .$$

Esempio 1.3.4. (1) Ogni funzione tra gruppi finiti è definibile.
(2) Se A è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango finito, allora ogni omomorfismo è la moltiplicazione per una matrice e quindi è definibile.

Lemma 1.3.5. *Sia H un gruppo interpretabile in una struttura M e sia G un'estensione finita di H. Supponiamo inoltre che ogni automorfismo di H sia definibile in H. Allora G è interpretabile in M.*

Dimostrazione. Denotiamo con $K = G/H$ (finito), sia s un' inversa destra per la proiezione π e sia $H *_s K$ il gruppo sopra definito. Allora risulta:

$$G \simeq H *_s K \; . \tag{1.3}$$

Data un'interpretazione di H in M, costruiamo tramite l'isomorfismo (1.3) un'interpretazione di G in M . Denotiamo con $\tilde{H}$ l'universo dell'interpretazione per H e sia

$$\tilde{f} : \tilde{H} \to H$$

la mappa delle coordinate (funzione surgettiva). Dato che ogni gruppo finito è interpretabile, possiamo suppore senza perdere di generalità che K sia un insieme definibile in M. Quindi definiamo

$$f_{*_s} : \tilde{H} \times K \to G \tag{1.4}$$

ponendo $f_{*_s}(\tilde{h}, k_i) = (\tilde{f}(\tilde{h}), k_i)$. (Confondiamo G con la sua rappresentazione data in (1.3).) Osserviamo che le formule per l'uguaglianza e per l'unità si estendono in modo ovvio definendole 'coordinata per coordinata'.

Sia $\tilde{\phi}$ la formula per il prodotto di H. Possiamo definire la formula per il prodotto di G componendo $\tilde{\phi}$ secondo le regole date da $*_s$ (vedi (1.2)), usando i parametri in (1.1) e osservando che, grazie all'ipotesi di definibilità degli automorfismi, per ogni i esiste una formula che definisce il coniugio di H tramite $s(k_i)$. □

Osservazione 1.3.6. Osserviamo che l'ipotesi di definibilità in H degli automorfismi di H nel Lemma 1.3.5 si può rilassare richiedendo che tali automorfismi siano definibili da formule della struttura M che "ospita" H.

Corollario 1.3.7. *Sia H un gruppo abeliano finitamente generato interpretabile nella struttura M e sia G un'estensione finita di H. Allora G è interpretabile in M.*

Dimostrazione. Se H è abeliano finitamente generato, allora H è un prodotto finito di gruppi finiti e di uno $\mathbb{Z}$-modulo libero. Quindi ogni automorfismo di H è definibile in H (Esempio 1.3.4). Per il Lemma 1.3.5, G è interpretabile in M. □

Indichiamo con $(\mathbb{Z},+)$ il gruppo additivo degli interi (vedi esempio 1.1.1).

Corollario 1.3.8. *Sia G un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato H. Allora G è interpretabile nella struttura $(\mathbb{Z},+)$.*

Dimostrazione. Ogni gruppo abeliano finitamente generato H è interpretabile in $(\mathbb{Z},+)$. Per il Corollario 1.3.7 ogni estensione finita di H è interpretabile $(\mathbb{Z},+)$. □

Il Corollario 1.3.8 può essere enunciato in modo equivalente richiedendo che il gruppo G contenga un sottogruppo abeliano finitamente generato H di indice finito (non necessariamente normale).

Lemma 1.3.9. *Supponiamo che un gruppo G contenga un sottogruppo H tale che:*

1. *H è un gruppo abeliano finitamente generato.*

2. *H ha indice finito in G.*

Allora esiste un sottogruppo H' di G tale che H' è un sottogruppo normale e di indice finito in G e H' è abeliano finitamente generato.

Dimostrazione. Se $g \in G$, chiamiamo g-coniugato di H il sottogruppo $g \cdot H \cdot g^{-1}$, immagine di H sotto l'automorfismo di coniugio di G tramite g. Definiamo H' come l'intersezione di tutti i g-coniugati di H, al variare di $g \in G$. Allora $H' \lhd G$ e H' è abeliano finitamente generato in quanto $H' \leq H$. Dato che H ha indice finito in G l'insieme dei g-coniugati di H è finito: se g_1, g_2 sono nella stessa classe laterale destra di H in G, allora $g_1 \cdot H \cdot g_1^{-1} = g_2 \cdot H \cdot g_2^{-1}$. Ne segue che esistono $g_1, \ldots, g_k$ in G tali che:

$$H' = \bigcap_{i \leq k} g_i \cdot H \cdot g_i^{-1},$$

in particolare H' ha indice finito in G. □

Corollario 1.3.10. *Se un gruppo G ha un sottogruppo H tale che:*

1. *H è abeliano finitamente generato.*

2. *H ha indice finito in G.*

Allora G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.

Dimostrazione. Per il Lemma 1.3.9, esiste un sottogruppo H' di G tale che:

- H' è abeliano finitamente generato;

- $H' \lhd G$ e $[G : H'] < \infty$.

Allora G è un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato e, per il Corollario 1.3.8, G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. □

1.4 Estensioni finite di Moduli

In questo paragrafo trattiamo il caso dei moduli mostrando che, se l'ipotesi della definibilità degli automorfismi è funzionale nel caso generale, essa risulta irrilevante in un contesto totalmente abeliano. In particolare, ogni estensione finita di moduli "preserva" le interpretazioni (Lemma 1.4.2). Concludiamo con un'osservazione sui gruppi *virtualmente abeliani* (abelian-by-finite) che avranno un ruolo centrale nel capitolo 4 (Osservazione **??**)

Siano R un anello e M un R-modulo sinistro (destro). Sia $N \leq M$ un sottomodulo, diciamo che M è un'*estensione finita* di N se M/N è finito. Allora posto $K = M/N$ possiamo considerare la successione esatta corta canonica

$$1 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} K \to 1 \tag{1.5}$$

e definire

$$s : K \to M$$

come un'inversa destra per la proiezione. Notiamo che in particolare (1.5) è una succesione di gruppi abeliani e omomorfismi. Quindi come prima si può definire un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\alpha : M_{\mathbb{Z}} \stackrel{\cong}{\to} (N *_s K)_{\mathbb{Z}}$$

solo che in questo caso l'operazione $*_s$ ha la forma più semplice

$$(h_1, k_1) *_s (h_2, k_2) = (h_1 + h_2 + s(k_1) + s(k_2) - s(k_1 + k_2),\ k_1 + k_2)$$

Osservazione 1.4.1. Sia $\alpha : M \cong H$ un isomorfismo di gruppi abeliani. Sia R un anello e supponiamo inoltre che esista una struttura di R-modulo sinistro (destro) su M. Allora esiste una struttura di R-modulo sinistro (destro) su H che rende α una mappa R-lineare (cioè un isomorfismo di R-moduli). Infatti è sufficiente porre, per ogni $h \in H$ e per ogni $r \in R$

$$r * h = \alpha(r \cdot \alpha^{-1}(h)) \tag{1.6}$$

Nello spirito dell'Osservazione 1.4.1 l'assegnazione

$$r *_s (h, k) = (r \cdot h + [r \cdot s(k) - s(r \cdot k)],\ r \cdot k) \tag{1.7}$$

definisce una struttura di R-modulo sinistro su $(N *_s K)_{\mathbb{Z}}$ tale che

$$\alpha :\ {}_RM \ \to\ {}_R(N *_s K)$$

è un isomorfismo di R-moduli sinistri.

Omettiamo la dimostrazione del seguente lemma in quanto del tutto simile a quella nel lemma 1.3.5.

Lemma 1.4.2. *Consideriamo la successione esatta corta (1.5) di R-moduli dove $K = M/N$ è finito. Supponiamo che N sia interpretabile in una struttura A. Allora M è interpretabile in A.*

1.5 Un'applicazione : i gruppi cristallografici

In questo paragrafo proponiamo un'applicazione delle tecniche sviluppate per l'interpretazione di estensioni finite. Diamo prima qualche informazione sui gruppi cristallografici, definendoli come particolari gruppi di movimenti rigidi dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ e fornendo alcune caratterizzazioni in termini astratti. Mostriamo infine che i gruppi cristallografici sono interpretabili in $(\mathbb{Z}, +)$.

In mineralogia e cristallografia, un cristallo è un oggetto solido costituito da atomi, molecole o ioni aventi una disposizione geometricamente regolare, che si ripete indefinitamente nelle tre dimensioni spaziali, detta reticolo cristallino. Generalizzando, possiamo pensare ad un cristallo come ad un reticolo nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, generato da una componente elementare che si ripete indefinitamente nelle n-direzioni coordinate.

Uno degli obbiettivi della cristallografia, è quello di classificare le varie tipologie di cristalli presenti in natura. Matematicamente parlando, una tale classificazione può essere data tramite lo studio dei gruppi di simmetrie dei cristalli, cioè gruppi di movimenti rigidi dello spazio che preservano la struttura cristallina. In un tale gruppo vi sono sempre n simmetrie di traslazione linearmente indipendenti ma, ad esempio, possono esserci anche simmetrie di rotazione. In generale, il gruppo delle simmetrie di un cristallo viene chiamato *gruppo spaziale* o *gruppo cristallografico.*

Indichiamo con $Isom(\mathbb{E}^n)$ il gruppo dei movimenti rigidi dello spazio euclideo n-dimensionale (isometrie). Questo gruppo agisce in modo naturale sullo spazio $\mathbb{E}^n$. Un sottogruppo $G \leq Isom(\mathbb{E}^n)$ si dice discreto se per ogni $x \in \mathbb{E}^n$ l'insieme $\{\alpha(x) : \alpha \in G\}$ non ha punti di accumulazione. Indichiamo con $\mathbb{E}^n/G$ lo spazio quoziente di $\mathbb{E}^n$ tramite l'azione data da G (come sottogruppo delle isometrie).

Definizione 1.5.1. Un sottogruppo discreto G di $Isom(\mathbb{E}^n)$ si chiama gruppo cristallografico se lo spazio quoziente $\mathbb{E}^n/G$ è compatto.

Un *dominio fondamentale* per l'azione di G su $\mathbb{E}^n$ è un sottoinsieme aperto $D \subseteq \mathbb{E}^n$ tale che:

- l'unione delle chiusure dei vari $\alpha(D)$, al variare di $\alpha \in G$, copre $\mathbb{E}^n$;
- per ogni $\alpha \in G$ diverso dall'identità, risulta $D \cap \alpha(D) = \emptyset$.

Allora un sottogruppo discreto G di $Isom(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo cristallografico se e solo se la chiusura del suo dominio fondamentale è compatta. Ad esempio, se consideriamo il gruppo delle traslazioni intere $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che agisce su $\mathbb{E}^2$, un dominio fondamentale per l'azione di G è il quadrato $D = (0, 1) \times (0, 1)$ la cui chiusura è compatta. Lo spazio quoziente $\mathbb{E}^2/G$ è un toro, e quindi è compatto.

Una caratterizzazione dei gruppi cristallografici, data da Bieberbach, è contenuta nel seguente teorema (Teorema 3.2 in [9]).

Teorema 1.5.2. *(Bieberbach's first theorem) Un sottogruppo $G \leq Isom(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo cristallografico se e solo se G contiene n traslazioni linearmente indipendenti.*

Una caratterizzazione in termini più astratti è fornita dal seguente teorema (Teorema 3.3 in [9]).

Teorema 1.5.3. *Un gruppo astratto G è isomorfo ad un gruppo cristallografico se e solo se G contiene un sottogruppo abeliano libero di rango n, normale, di indice finito ed inoltre massimale abeliano.*

Per ulteriori dettagli e approfondimenti, nonchè per una chiara esposizione delle tecniche di classificazione dei gruppi cristallografici si rimanda a [9].

Quello che faremo è mostrare come sia sempre possibile costruire una "mappa di coordinate" intere per tali gruppi. Cioè, dimostreremo che i gruppi cristallografici sono interpretabili nella struttura additiva degli interi $(\mathbb{Z}, +)$. Otterremo ciò come una diretta applicazione del Corollario 1.3.8 nel primo paragrafo di questo capitolo.

Teorema 1.5.4. *Ogni gruppo cristallografico è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo cristallografico. Dal Teorema 1.5.3 segue che G può essere messo nella successione esatta corta:

$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \to 1$$

dove H è abeliano libero di rango n, normale in G e $K \simeq G/H$ è finito. Allora, a meno di isomorfismi, G è un'estensione finita di $\mathbb{Z}^n$. Quindi per il Corollario 1.3.8, G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. $\square$

Capitolo 2

Teorie Weakly Normal

Nel capitolo 1 si è mostrato com'è possibile interpretare un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato nella struttura additiva degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ (Corollario 1.3.8). Quello che ci proponiamo di fare ora, è provare che in effetti, questi sono gli unici casi. Il risultato a cui vogliamo arrivare è il seguente (Teorema 3.3.4):

Teorema. *Se un gruppo astratto G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$, allora G ha un sottogruppo normale e di indice finito H, tale che H è abeliano finitamente generato.*

A differenza del Corollario 1.3.8, per questo risultato non abbiamo una dimostrazione semplice e diretta. Esso sarà dedotto da un risultato molto più generale, ad opera di Evans, Pillay e Poizat, presente in [7]. Questo capitolo e buona parte del successivo, sono quindi dedicati alla "comprensione" di quest'ultimo.

Le idee centrali intorno alle quali vengono costruiti gli strumenti che utilizzeremo per la soluzione del nostro problema, ruotano intorno alla nozione di automorfismo di una struttura. Un punto di partenza per studiare determinate proprietà di una teoria consiste nel "conoscere" gli insiemi definibili da formule del primo ordine nei suoi modelli. L'idea è quella di studiare la definibilità in un modello M in termini di particolari gruppi di automorfismi di M. Daremo quindi delle nozioni di definibilità e di algebricità (quasi-definibilità) per un insieme X su di un insieme di parametri A. Nel particolare contesto della teoria dei "campi algebricamente chiusi" questa definizione di algebricità coincide con quella che usualmente viene data nell'ambito della teoria delle estensioni di campi. Per questo motivo, quest'approccio alla definibilità può essere considerato come una generalizzazione della teoria di Galois per le equazioni algebriche.

Entrando più nello specifico, se indichiamo con a, A rispettivamente un elemento e un sottoinsieme di una struttura M, abbiamo sostanzialmente due modi per esprimere il fatto che a è definibile o algebrico su A. Il primo, legato in modo più diretto alle formule del linguaggio, consiste nel dire che:

- a è definibile su A se a è l'unico elemento in M che "realizza" una formula con parametri in A ;
- a è algebrico su A se a "realizza" una formula con parametri in A che ha un numero finito di "soluzioni" in M.

Se invece si considera il gruppo $Aut_A(M)$ degli automorfismi di M che fissano A puntualmente, si può dire che:

- a è definibile su A se a è fissato da ogni automorfismo in $Aut_A(M)$;
- a è algebrico su A se l'orbita di a sotto l'azione di $Aut_A(M)$ è finita.

In generale, le prime definizioni implicano le seconde. Più difficile è invece, ad esempio, trovare una formula con parametri in A tale che a sia l'unica sua "radice", sapendo che a è fissato da ogni A-auotomorfismo di M. Vedremo nel Paragrafo 2.1 come, sotto particolari condizioni sulla struttura M, sia possibile ottenere l'equivalenza delle due definizioni.

La discussione delle proprietà della struttura M che permettono l'identificazione tra le definizioni date sopra, occupa un intero paragrafo ed ha un importanza più larga. Esse sono infatti legate ai cosiddetti "tipi" di una teoria. Sia T una teoria completa in un linguaggio L. Un tipo di T è una collezione $\Sigma(\bar{x})$ di L-formule nelle variabili libere $\bar{x}$ tali che $\Sigma(\bar{x}) \cup T$ è coerente (ha un modello). Una realizzazione di un tipo è una successione $\bar{a}$ di elementi in un modello M di T che soddisfa tutte le formule del tipo. Un tipo con parametri in un insieme A contenuto in un modello M di T è per definizione un tipo della teoria $Th((M, a)_{a \in A})$. Le proprietà che vogliamo soddisfi il nostro modello M sono le seguenti:

1. Saturazione: ogni tipo su di un insieme di parametri "piccolo" $A \subseteq M$, è realizzato in M .
2. Forte Omogeneità: due elementi in M realizzano lo stesso tipo se e solo se sono coniugati sotto l'azione di $Aut(M)$.

L'aggettivo "piccolo", usato nei punti (1) di sopra, si riferisce alla cardinalità dell'insieme A rispetto alle proprietà indicate. Più precisamente, se k è un cardinale si parlerà di k-saturazione (si richiede in (1) che $|A| < k$) e forte

k-omogeneità (vale (2) per β-uple di elementi, con $\beta < k$). Proveremo l'esistenza di modelli di una teoria completa T, k-saturi e fortemente k-omogenei per un cardinale infinito k arbitrariamente grande (Teorema 2.1.13). Questo particolare modello, indicato con $\bar{M}$ e chiamato *monster model*, sarà praticamente preso come universo in quanto, se M è un altro modello di T e $|M| < k$, allora M risulta isomorfo ad una sottostruttura elementare di $\bar{M}$ (Lemma 2.1.12). Quindi, a patto di considerare insiemi e modelli "piccoli", potremo assumere di lavorare nell'universo $\bar{M}$, k-saturo e fortemente k-omogeneo per un cardinale k arbitrariamente grande (ma ovviamente fissato).

Il punto di vista è il seguente: supponiamo di avere un gruppo G interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. Allora, a meno di isomorfismi, possiamo direttamente suppore che G sia un gruppo definibile nell'espansione degli immaginari $\mathbb{Z}^{eq}$ (Teorema 2.2.11). Il problema quindi è ricondotto a studiare i gruppi definibili nella struttura $\mathbb{Z}^{eq}$ e più in generale i gruppi definibili nel modello saturo (monster model) $\bar{\mathbb{Z}}$ di $Th(\mathbb{Z})$ e nella relativa espansione $\bar{\mathbb{Z}}^{eq}$. I Paragrafi 2.1 e 2.2 sono dedicati alla costruzione delle strutture sopra citate. Le principali proprietà che ci interessano hanno un carattere piuttosto generale e non riguardano solamente la struttura $(\mathbb{Z}, +)$. Le classi di gruppi interessate sono:

- i gruppi abeliani (e più in generale i moduli) ;
- i gruppi "virtualmente abeliani" (abelian-by-finite), cioè gruppi che hanno un sottogruppo abeliano di indice finito.

Queste strutture hanno in comune la seguente proprietà: se indichiamo con H una tale struttura, allora $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal. Questo capitolo è in larga parte dedicato allo studio di queste teorie. In generale, una teoria completa T si dice Weakly Normal, se T gode di una particolare eliminazione dei quantificatori: si dice che un insieme definibile $X \subseteq \bar{M}$ è Weakly Normal se ogni famiglia infinita di coniugati di X sotto l'azione di $Aut(\bar{M})$, a due a due distinti, ha intersezione vuota (Definizione 2.4.13). La teoria completa T si dice Weakly Normal se ogni insieme definibile in $\bar{M}$ è combinazione booleana finita di insiemi definibili Weakly Normal (Definizione 2.4.18). Una conseguenza immediata dei teoremi di Bauer-Monk e Szmielev sull'eliminazione dei quantificatori tramite p.p. formule per i moduli, è che ogni teoria completa di R-moduli, per qualche anello R, è Weakly Normal. Il Paragrafo 2.5 contiene una discussione abbastanza dettagliata sui moduli intorno a questi argomenti. Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [1]. Da questi ragionamenti deduciamo in particolare che $Th(\mathbb{Z}, +)$ è una teoria Weakly Normal.

Tutto il lavoro presente nei Paragrafi 2.3 e 2.4, è dedicato a fornire una caratterizzazione delle teorie Weakly Normal attraverso lo studio dei tipi di queste teorie. Sia T una teoria completa e indichiamo con $\bar{M}$ il suo monster model. Se a, A sono rispettivamente un elemento ed un insieme $\bar{M}$, indichiamo con $tp(a/A)$ il tipo completo di a su A, ovvero tutte le formule su A vere per a (in $\bar{M}$). Indichiamo con $S(A)$ l'insieme dei tipi completi di T con parametri in A. Osserviamo che l'insieme delle formule con parametri in A ha cardinalità $|T| + |A| = \lambda$. Quindi, a priori, un limite per la cardinalità di $S(A)$ può essere 2^λ. Sia λ un cardinale infinito. La teoria T si dice λ-*stabile* se per ogni modello M di cardinalità al più λ risulta $|S(M)| \leq \lambda$. Diciamo che T è *stabile* se esiste un cardinale infinito λ tale che T è λ-stabile. Se la teoria è Weakly Normal, allora ogni tipo $p \in S(A)$ è in un certo senso determinato dall'insieme di formule Weakly Normal che sono in p. Si dimostra quindi che, in questo caso, se λ è tale che $\lambda^{|T|} = \lambda$, allora per ogni modello M di cardinalità al più λ risulta $|S(M)| \leq \lambda$ (Lemma 2.4.20). Quindi, ogni teoria Weakly Normal è Stabile.

Lo studio delle teorie stabili copre una larga parte della Teoria dei Modelli, chiamata appunto "Stability Theory". Nel Paragrafo 2.3 vediamo com'è possibile definire all'interno di una teoria stabile, una nozione di "indipendenza" tra elementi e insiemi che può essere pensata come una generalizzazione della relazione di "dipendenza lineare" negli spazi vettoriali e della "dipendenza algebrica" nella teoria dei campi algebricamente chiusi (in effetti se H è uno spazio vettoriale o un campo algebricamente chiuso, $Th(H)$ è una teoria stabile e le definizioni per la relazione di dipendenza che diamo coincidono con le usuali). In particolare, se a, B, C indicano rispettivamente una n-upla e due insiemi in $\bar{M}$, siamo in grado di definire una nozione per cui a è indipendente da B su C, studiando l'estensione del tipo $tp(a/C)$ al tipo $tp(a/C \cup B)$. Entrando più nel dettaglio, se $A \subseteq B$ sono insiemi in $\bar{M}$, siamo interessati a studiare le estensioni di un tipo $p \in S(A)$ ad un tipo $q \in S(B)$. Con il termine estensione intendiamo dire che $p \subseteq q$, cioè ogni formula in p è in q, o in altri termini $q \models p$. Osserviamo che, in generale, estensioni di p ad un tipo completo su B esistono sempre. Ad esempio, se a realizza p il tipo $tp(a/B)$ è certamente un'estensione di p su B. Fra tutte le estensioni di p su B siamo in grado di distinguerne alcune con particolari proprietà, che chiamiamo estensioni *non-forking* di p su B. Se $q \in S(B)$ è tale che $q \upharpoonright A \subseteq q$ risulta un'estensione non-forking, allora diciamo che q è non-forking su A. Siamo in grado di definire anche una relazione di forking tra formule e insiemi. In particolare, se ϕ è una formula ed A un insieme, tale relazione sarà espressa dicendo che ϕ è non-forking su A (Definizione 2.3.24). La principali proprietà che cerchiamo nelle estensioni non-forking possono essere così riassunte:

- (Esistenza) Sia $p \in S(A)$ e sia M un modello contenente A. Allora p ha un'estensione non-forking ad un tipo completo su M.
- (Carattere finito) Siano $A \subseteq B$ e $p \in S(B)$. Allora p è non-forking su A se e solo se ogni formula $\phi \in p$ è non-forking su A.
- (Transitività) Siano $A \subseteq B \subseteq C$ e $p \in S(C)$. Allora p è non-forking su A se e solo se p è non-forking su B e $p \upharpoonright B$ è non-forking su A.
- (Simmetria) Per ogni a, b, A, $tp(a/A \cup \{b\})$ è non-forking su A se e solo se $tp(b/A \cup \{a\})$ è non-forking su A.

La relazione di forking permette di definire nella teoria stabile T, la nozione indipendenza cercata. In particolare, diciamo che un elemento a è indipendente da B su A se $tp(a/B \cup A)$ è un'estensione non-forking di $tp(a/A)$. In [5] è presente una discussione molto bella e approfondita sul significato della relazione di forking nelle teorie stabili.

In generale, dato un tipo $p \in S(A)$, abbiamo un limite per il numero di estensioni non-forking su di un insieme $B \supseteq A$ ed è precisamente $2^{|T|}$ (Teorema 2.3.26). In alcuni casi, tuttavia, p ha la propietà di avere un'unica estensione non-forking su ogni insieme $B \supseteq A$. Un tipo con questa proprietà si chiama *tipo stazionario*. Ogni tipo su di un insieme A ha un'estensione non-forking su A ad un tipo stazionario. Questi tipi sono molto importanti per il nostro studio in quanto ci permettono di definire una nozione generale di base. Questa, è collegata allo studio degli automorfismi della struttura $\bar{M}$. Ricordiamo dal paragrafo 1 che tali automorfismi agiscono per "traslazione" sui tipi con parametri da $\bar{M}$. Allora diciamo che, un insieme C è una base per il tipo stazionario p se, per ogni automorfismo α, $\alpha(p) = p$ se e solo se α fissa puntualmente C (Lemma 2.4.3). In una teoria stabile T riusciamo a costruire una base per ogni tipo stazionario. Chiamiamo una tale base "canonica". Se p è un tipo stazionario su A, una successione di Morley per p è definita come segue: ogni elemento realizza l'unica estensione non-forking di p sull'insieme costituito da A e dagli elementi che lo precedono (Definizione 2.4.5). Allora, la base canonica di p è contenuta nell'insieme degli immaginari che sono definibili su una successione di Morley per p (Lemma 2.4.6). In questo senso diciamo che la base canonica di p è determinata da una successione di Morley per p. La teoria stabile T è detta *1 based* se la base canonica di ogni tipo stazionario in $\bar{M}^{eq}$ è determinata (in un certo senso) dal primo elemento di una successione di Morley per p (Definizione 2.4.11).

Per motivi tecnici, il naturale luogo dove riusciamo a definire la base canonica è $\bar{M}^{eq}$. Conviene quindi studiare le cose direttamente in questa struttura. Osserviamo che, in generale, passare a $\bar{M}^{eq}$ non crea particolari problemi in quanto molte proprietà di $\bar{M}$ (saturazione, stabilità, ...) si trasferiscono. L'unico punto delicato è stabilire se, nel caso in cui T goda di una certa eliminazione dei quantificatori, lo stesso vale per T^{eq} (quindi sostanzialmente gli insiemi definibili in $\bar{M}^{eq}$ preservano la "forma" di quelli definibili in $\bar{M}$). Il risultato principale descritto in questo capitolo è il seguente: una teoria T è Weakly Normal se e solo se T è stabile e 1 based (Teorema 2.4.28). Quindi se una teoria T è Weakly Normal allora ogni insieme definibile in $\bar{M}^{eq}$ è combinazione booleana finita di insiemi definibili Weakly Normal, cioè T^{eq} è Weakly Normal (Corollario 2.4.29). Questo risultato sarà molto usato nel Capitolo 3.

Nel Paragrafo 2.6, analizziamo il caso delle teorie *totalmente trascendenti* (t.t.). Questa è una classe particolare di teorie stabili. Ci serviamo di queste strutture come esempio, per mostrare il significato che assumono, in questo contesto, la relazione di forking e la proprietà 1 based per i tipi stazionari. In generale all'interno di una teoria stabile si può definire un rango per gli insiemi definibili e più in generale per i tipi chiamato *rango di Morley*. Intuitivamente questo rango misura il "grado di ramificazione" di un tipo nel Poset dei tipi completi in $\bar{M}$. Una teoria si dice totalmente trascendente (t.t.) se ogni tipo completo ha rango di Morley definito (cioè è un numero ordinale α definito). La relazione di forking nelle teorie t.t. può essere studiata in termini del rango di Morley (la definizione è presente all'inizio del Paragrafo 2.6). In particolare, $p \subseteq q$ è un'estensione non-forking se e solo se p e q hanno lo stesso rango (Teorema 2.6.5). Analizziamo la relazione di indipendenza in particolari insiemi definiti in un modello di una teoria t.t., detti insiemi *Strongly Minimal* (Definizione 2.6.6). Vediamo come la relazione di indipendenza definita tramite la relazione di forking, in un insieme Strongly Minimal in una teoria t.t., coincide con la relazine di indipendenza algebrica definita come segue: una n-upla a è algebricamente indipendente da un insieme A se e solo se $a \notin acl(A)$. In particolare, se indichiamo con D un insieme Strongly Minimal definito in un modello di una teoria t.t., per ogni $a \in D$ otteniamo (Lemma 2.6.11): a è algebricamente indipendente da A se e solo se a è indipendente da A sul $\emptyset$ (indipendente nel senso del forking). La relazione di algebricità in un insieme Strongly Minimal D, soddisfa dei generali assiomi per un "operatore di chiusura" su un insieme che permettono di definire su D una struttura di *pre-geometria*.

In generale, se S è un insieme, una funzione $cl(-)$ che ad ogni sottoinsieme di S associa un sottoinsieme di S, si chiama operatore di chiusura se, indicando con a, b, X, Y rispettivamente elementi e sottoinsiemi di S, risulta:

1. $X \subseteq cl(X)$;
2. $X \subseteq Y \Rightarrow cl(X) \subseteq cl(Y)$;

3. $cl(cl(X)) = cl(X)$;

4. $a \in cl(X \cup \{b\}) \setminus cl(X) \Rightarrow b \in cl(X \cup \{a\})$;

5. $a \in cl(X) \Rightarrow a \in cl(X')$ per qualche insieme finito $X' \subseteq X$.

In tal caso, la coppia (S, cl) si chiama pre-geometria. Una geometria è una pre-geometria tale che $cl(\emptyset) = \emptyset$ e, per ogni $a \in S$, $cl(\{a\}) = \{a\}$. C'è un modo canonico per associare ad una pre-geometria una geometria (vedi Osservazione 2.6.10). Un sottoinsieme X si dice indipendente se per ogni $a \in X$ risulta $a \notin cl(X \setminus \{a\})$. Ogni sottoinsieme X contiene un sottoinsieme massimale indipendendente X_0 e si chiama *base* per X. Tutte le basi per X hanno la stessa cardinalità che si indica con $dim(X)$ e si chiama *dimensione* di X. Se $A \subseteq S$ si chiama *localizzazione* in A la pre-geometria (S, cl_A) dove $cl_A(X) = cl(X \cup A)$. Una pre-geometria (S, cl) si dice:

- *banale* se per ogni insieme X risulta $X = \bigcup_{x \in X} cl(\{x\})$;

- *omogenea* se per ogni insieme chiuso X e per ogni $a, b \in S \setminus X$ esiste un X-automorfismo di S che manda a in b ;

- *modulare* se per ogni coppia di chiusi X, Y vale

$$dim(X \cup Y) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y) \ ;$$

- *localmente modulare* se la localizzazione su qualche singoletto è modulare.

Sia D un insieme Strongly Minimal definito in un modello di una teoria t.t., se per ogni sottoinsieme $A \subseteq D$, poniamo $cl(A) = acl(A) \cap D$ (tutti gli elementi di D che sono algebrici su A, Definizione 2.2.5), allora (D, cl) è una pre-geometria omogenea (Lemma 2.6.12). Inoltre per ogni n-upla $b \in D$ e per ogni $A \subseteq D$, la dimensione di b su A, $dim(b/A)$ è uguale al rango di Morley del tipo $tp(b/A)$. Per questo motivo il rango di Morley nelle teorie totalmente trascendenti generalizza la nozione di dimensione.

La proprietà 1 based per i tipi stazionari, nel caso di teorie t.t., è collegata alla modularità della pre-geometria associata ad un insieme Strongly Minimal (D, cl) sopra descritta. In particolare (2.6.20):

- $(D, cl(-))$ modulare $\Rightarrow D$ è 1 based ;

- $(D, cl(-))$ localmente modulare $\Leftrightarrow D$ 1 based .

Quindi, se la teoria t.t T è 1 based e se D è un insieme Strongly Minimal definito in un modello di T, allora $(D, cl(-))$ è localmente modulare.

L'impostazione nell'esposizione di questi risultati, per quanto riguarda i Paragrafi 2.3, 2.4 e 2.6, segue più o meno fedelmente quella in [13] e [4]. Per questo motivo abbiamo tentato il più possibile di uniformare anche la notazione. Altri lavori di riferimento sono [8], che permette di inquadrare le teorie Weakly Normal nell'ambito più generale delle cosiddette teorie equazionali, e [1] per la teoria dei moduli. Il risultato principale di questo capitolo è presente (in modo più ampliato e completo) in [6], anche se li si adotta un punto di vista leggermente differente ma in ogni caso equivalente. L'impostazione presente in questo capitolo, per il risultato principale, si trova in [4].

2.1 Modelli saturi e fortemente omogenei

In questo paragrafo iniziamo lo studio degli automorfismi e dei tipi di una teoria (che supponiamo sempre coerente). Inoltre, fissata una teoria completa T, per ogni cardinale infinito k, dimostriamo l'esistenza di un modello $\bar{M}$ di T, k-saturo e fortemente k-omogeneo. A meno di riferirsi a insiemi e modelli di cardinalità inferiore a k, possiamo considerare $\bar{M}$ come "universo" in cui lavorare, in quanto ogni modello di cardinalità inferiore a k è isomorfo ad una sottostruttura elementare di $\bar{M}$.

Sia T una L-teoria. Denotiamo con $\bar{x}$ una n-upla di variabili. Sia $\Sigma(\bar{x})$ un insieme di L-formule nelle variabili libere $\bar{x}$. Diciamo che $\Sigma(\bar{x})$ è coerente se è coerente come L$\cup\{\bar{x}\}$-teoria.

Definizione 2.1.1. Siano T una L-teoria e $\Sigma(\bar{x})$ un insieme di L$\cup\bar{x}$-formule.

1. Si dice che $\Sigma(\bar{x})$ è un tipo di T se $T \cup \Sigma(\bar{x})$ è coerente;

2. Si dice che $\Sigma(\bar{x})$ è un n-tipo completo di T se $\Sigma(\bar{x})$ è un tipo di T e se per ogni L-formula $\phi(\bar{x})$, $\phi \in \Sigma(\bar{x})$ oppure $\neg\phi \in \Sigma(\bar{x})$. Indichiamo con $p(\bar{x}), q(\bar{x}), r(\bar{x}), \ldots$ i tipi completi di T.

Osservazione 2.1.2. Osserviamo che quando scriviamo $\phi(\bar{x})$ intendiamo dire che $\phi(\bar{x})$ è una L-formula che non ha altre variabili libere oltre quelle presenti in $\bar{x}$ e quindi in generale non è detto che effettivamente le variabili in $\bar{x}$ siano contenute in $\phi(\bar{x})$. In particolare se $p(\bar{x})$ è un tipo completo di T, allora $T \subseteq p(\bar{x})$.

Siano M una L-struttura e A un sottoinsieme di M. Indichiamo con L$_A$ l'espansione di L ottenuta aggiungendo simboli di costante per gli elementi di A e con $(M, a)_{a\in A}$ la relativa L$_A$-struttura. Un tipo con parametri da A è per definizione un tipo della teoria $Th((M,a)_{a\in A})$. Indichiamo con $S_n(A,M)$ l'insieme degli n-tipi completi con parametri da A relativamente alla struttura M. Ometteremo alcuni "indici" dalla scrittura se la loro specificazione è chiara nel contesto. Se $\bar{a}$ è una n-upla di elementi in M e $A \subseteq M$, l'insieme

$$tp_M(\bar{a}/A) = \{\phi(\bar{x}) \in L_A : M \models \phi(\bar{a})\}$$

è un tipo completo con parametri in A e si chiama tipo completo di $\bar{a}$ su A relativamente ad M. Scriviamo $tp_M(\bar{a})$ nel caso in cui $A = \emptyset$.

Osservazione 2.1.3. A priori $tp_M(\bar{a}/A)$ dipende da M. Tuttavia, se N è una L-struttura tale che $M \preceq N$, allora $tp_M(\bar{a}/A) = tp_N(\bar{a}/A)$.

Sia $\Sigma(\bar{x})$ un n-tipo di una teoria T. Si dice che una n-upla $\bar{a}$ di elementi in un modello M di T realizza $\Sigma(\bar{x})$ se per ogni formula $\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$, $M \models \phi(\bar{a})$.

Osservazione 2.1.4. (i) Sia $\Sigma(\bar{x})$ un insieme di L-formule. Allora $\Sigma(\bar{x})$ è un n-tipo completo della teoria T se e solo se $\Sigma(\bar{x}) = tp_M(\bar{a})$ per qualche modello M di T e per qualche n-upla $\bar{a}$ di elementi di M. Ogni tipo $p \in S_n(A,M)$ è realizzato in un'estensione elementare N di M.
(ii) Più in generale, se M è una L-struttura allora esiste un'estensione elementare N di M che realizza *tutti* gli n-tipi sui sottoinsiemi di M. Infatti, se scriviamo $ED(M) = Th((M,m)_{m\in M})$ ed indichiamo con $P = \{p_i(\bar{x}_i) : i \in I\}$ l'insieme di tali tipi (dove si considerano le variabili tutte distinte), allora per compattezza $ED(M) \cup P$ è coerente e quindi ha un modello. Tale modello per costruzione è isomorfo a un'estensione elementare di M.

Definizione 2.1.5. Sia k un cardinale infinito. Una L-struttura M si dice k-satura se per ogni sottoinsieme A di M tale che $|A| < k$, ogni tipo $p \in S_n(A)$ è realizzato in M.

Lemma 2.1.6. *Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare N tale che N è $|M|^+$-satura.*

Dimostrazione. Sia $k = |M|$. Usando la parte (ii) dell'Osservazione 2.1.4 costruiamo una successione di L-strutture $(M_\alpha : \alpha < k^+)$ tali che:

1. $M_0 = M$;
2. $M_{\alpha+1} \succeq M_\alpha$ e realizza tutti i tipi completi sui sottoinsiemi di M_α ;
3. $M_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ se λ è limite .

Sia $N = \bigcup_{\alpha<k^+} M_\alpha$. Si verifica che $M \preceq N$. Proviamo che N è k^+ satura.

Sia $A \subseteq N$ tale che $|A| \leq k$ e sia $p \in S_n(A)$. Dal fatto che k^+ è regolare $(cf(k^+) = k^+)$ segue che A è limitato in N, cioè esiste $\alpha < k^+$ tale che $A \subseteq M_\alpha$. Per costruzione p è realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in N. □

Iniziamo ora lo studio degli automorfismi di una struttura.

Definizione 2.1.7. Siano M, N due L-strutture. Una funzione biunivoca $\alpha : dom(M) \to dom(N)$ si dice un isomorfismo tra M ed N se α "preserva" le interpretazioni dei simboli, cioè se per ogni simbolo di costante c, per ogni simbolo di funzione f e per ogni simbolo di relazione R in L risulta:

- $\alpha(c^M) = c^N$;
- $\alpha(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$;
- $(a_1, \dots, a_n) \in R^M \ \Leftrightarrow\ (\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in R^N$.

Se nella definizione precedente si considera il caso $M = N$, allora un isomorfismo da M in M si chiama automorfismo di M. Indichiamo con $Aut(M)$ il gruppo degli automorfismi di M. Se $A \subseteq M$ indichiamo con $Aut_A(M)$ il gruppo degli automorfismi di M che fissano A puntualmente.

Osservazione 2.1.8. Una funzione biunivoca $\alpha : dom(M) \to dom(N)$ è un isomorfismo tra le L-strutture M ed N se e solo se per ogni L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni n-upla $a_1, \dots, a_n$ di elementi di M risulta

$$M \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow N \models \phi(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \ . \tag{2.1}$$

Definizione 2.1.9. Una funzione elementare parziale tra due L-strutture M, N è una funzione biunivoca α da un sottoinsieme $dom(\alpha) \subseteq dom(M)$, in un sottoinsieme $Im(\alpha) \subseteq dom(N)$, tale che, per ogni L-formula ϕ e per ogni n-upla $a_1, \dots, a_n$ di elementi in $dom(\alpha)$, sia soddisfatta la condizione (2.1).

La teoria dei tipi esposta all'inizio di questo paragrafo si estende al caso in cui consideriamo insiemi di formule Σ con variabili libere incluse in un insieme indicizzato arbitrario $\{x_i : i \in I\}$ (ad esempio I può essere un numero ordinale β).

In particolare, se T è una L-teoria, un insieme di L-formule Σ, con variabili libere incluse in $\{x_i : i \in I\}$, si chiama *tipo* di T se $T \cup \Sigma$ è coerente, cioè se esiste un modello M di T e una successione $(a_i)_{i \in I}$ di elementi di M tali che per ogni formula $\phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \Sigma$ risulta

$$M \models \phi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \ .$$

Se M è una L-struttura ed $A \subseteq M$ è un sottoinsieme, indichiamo con

$$tp_M((a_i)_{i \in I}/A)$$

l'insieme delle L_A-formule $\phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, con variabili libere incluse in $\{x_i : i \in I\}$, tali che $M \models \phi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$. Come prima, ometteremo dalla scrittura l'insieme A di parametri nel caso in cui sia vuoto.

Osservazione 2.1.10. Sia α una funzione biunivoca da un sottoinsieme A di M in un sottoinsieme B di N. Scriviamo $A = \{a_i : i < \beta\}$ e $B = \{b_i : i < \beta\}$, dove β è un qualche ordinale che indicizza i due insiemi e per ogni $i < \beta$, $b_i = \alpha(a_i)$. Allora α è una funzione elementare parziale tra M ed N se e solo se $tp_M((a_i)_{i<\beta}) = tp_N((b_i)_{i<\beta})$.

Definizione 2.1.11. Sia k un cardinale infinito. Una L-struttura M si dice *fortemente k-omogenea* se per ogni $\beta < k$, se a, b sono una coppia di β-uple di elementi di M tali che $tp_M(a) = tp_M(b)$, allora esiste un automorfismo f di M tale che $f(a) = b$.

Equivalentemente, una L-struttura M è fortemente k-omegenea se per ogni $\beta < k$, ogni funzione elementare parziale da M in M di "lunghezza" β si estende ad un automorfismo di M.

Lemma 2.1.12. *Siano M, N due L-strutture elementarmente equivalenti. Sia k un cardinale tale che $|M| \leq k$ ed N è k-saturo. Allora esiste un'immersione elementare di M in N.*

Dimostrazione. Assumiamo $|M| = k$ e scriviamo $M = (a_i : i < k)$. Definiamo induttivamente una successione $(b_i : i < k)$ in N tale che per ogni $\alpha < k$ risulti $tp_M(a_i : i < \alpha) = tp_N(b_i : i < \alpha)$. In base al criterio nell'Osservazione 2.1.10 , ciò è sufficiente.

Sia $\beta < k$. Scriviamo $a_{<\beta} = (a_i : i < \beta)$. Supponiamo di aver definito tale successione per ogni $\alpha < \beta$. Sia $p(x) = tp_M(a_\beta/a_{<\beta})$. Dato che M, N sono elementarmente equivalenti e considerato che, per ipotesi induttiva, $tp_M(a_{<\beta}) = tp_N(b_{<\beta})$ si deduce che, se sostituiamo in p i parametri $a_{<\beta}$ con $b_{<\beta}$ otteniamo un tipo $q(x) \in S_1(b_{<\beta}, N)$. Per le ipotesi di saturazione q è realizzato in N, diciamo da b_β. Per costruzione risulta $tp_M(a_{\leq\beta}) = tp_N(b_{\leq\beta})$. □

Teorema 2.1.13. *Sia k un cardinale infinito. Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare k-satura e fortemente k-omogenea.*

Dimostrazione. Tramite il lemma 2.1.6 costruiamo una successione di L-strutture $(M_\alpha : \alpha < k^+)$ tali che:

1. $M_0 = M$;
2. $M_{\alpha+1} \succeq M_\alpha$ e $M_{\alpha+1}$ è $|M_\alpha|^+$ satura ;
3. $M_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ se λ è limite .

Sia $N = \bigcup_{\alpha<k^+} M_\alpha$. Come nel Lemma 2.1.6, $N \succeq M$ e N è k^+-saturo. Proviamo che N è fortemente k^+-omogeneo.

Sia $\lambda < k^+$. Siano a, b λ-uple di elementi di N tali che $tp_N(a) = tp_N(b)$ e sia $f : a \to b$ il relativo isomorfismo parziale (Osservazione 2.1.10). Dal fatto che k^+ è regolare segue che esiste $\alpha < k^+$ tale che a, b sono contenute in M_α. Costruiamo tramite il Lemma 2.1.12 una successione crescente di isomorfismi $(f_\beta : \alpha \leq \beta < k^+)$, cioè $\beta_1 < \beta_2$ implica $f_{\beta_1} < f_{\beta_2}$:

1. f_α è dato dal lemma 2.1.12 considerando le strutture (M_α, a) e $(M_{\alpha+1}, b)$;

2. $f_{\beta+1}$ si ottiene da f_β allo stesso modo enumerando con a_{M_β} gli elementi di M_β e con $b_{M_{\beta+1}}$ le relative immagini tramite f_β. Poi si applica il Lemma 2.1.12 alle strutture $(M_{\beta+1}, a_{M_\beta})$ e $(M_{\beta+2}, b_{M_{\beta+1}})$;

3. se λ è limite si pone $f_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} f_\beta$.

Ponendo $f = \bigcup_{\beta<k^+} f_\beta$ si ottiene l'automorfismo voluto. □

Osservazione 2.1.14. Sia T una teoria completa e sia k un cardinale infinito. Allora per il Teorema 2.1.13, T ha un modello $\bar{M}$ k-saturo e fortemente k-omogeneo. Se inoltre siamo interessati a studiare insiemi e modelli in T di cardinalità inferiore a k, per il Lemma 2.1.12, possiamo considerare $\bar{M}$ come "universo".

2.2 Automorfismi ed elementi immaginari

In questo paragrafo iniziamo lo studio degli insiemi definibili nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria completa T. Definiamo inoltre l'espansione $\bar{M}^{eq}$ degli "immaginari" di $\bar{M}$. Passare a questa estensione permette di studiare la definibilità e la quasi-definibilità in termini di chiusura definibile e algebrica in $\bar{M}^{eq}$. Mostriamo che se un gruppo G è interpretabile in una struttura M allora G è isomorfo ad un gruppo definibile nell'espansione M^{eq}. In seguito definiamo i tipi "forti" di una teoria e li identifichiamo con determinati tipi "immaginari". Questi tipi sono molto importanti nel prosieguo della teoria, in quanto sono i prototipi dei cosiddetti "tipi stazionari" che studieremo a fondo nei capitoli 3 e 4.

Sia M una L-struttura. Denotiamo con $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ una n-upla di variabili. Sia $A \subseteq M$. Un sottoinsieme $B \subseteq M^n$ si dice A-**definibile** se esiste una formula $\phi(\bar{x})$ con parametri in A tale che $B = \{\bar{b} \in M^n : M \models \phi(\bar{b})\}$. Indicheremo con $\phi(M^n)$, o $\phi(M)$ se non ci sono ambiguità, il sottoinsieme di M^n definito da ϕ. Spesso diremo che un insieme è definibile se non intendiamo specificare l'insieme dei parametri sul quale è definibile.

Osservazione 2.2.1. Spesso è utile riferirsi direttamente ad insiemi definibili più che alle formule che li definiscono. Ad esempio, fissata una L-struttura M, un tipo di $Th(M)$ può essere visto in due modi equivalenti: come insieme di L-formule coerenti oppure come un *filtro* del POSET dei sottoinsiemi $\emptyset$-definibili di M (ordinato con l'inclusione). Così, un tipo completo $p \in S(A, M)$ è un *ultrafiltro* del POSET dei sottoinsiemi A-definibili di M.

Sia T una teoria completa. Fissiamo un modello $\bar{M}$ di T, k-saturo e fortemente k-omogeneo per un cardinale "grande" k (Osservazione 2.1.14). Ricordiamo dal paragrafo precedente che tali assunzioni ci assicurano che:

1. ogni tipo su sottoinsiemi di cardinalità minore di k è realizzato in $\bar{M}$;

2. due β-uple di elementi di $\bar{M}$, con $\beta < k$, hanno lo stesso tipo in $\bar{M}$ se e solo se sono coniugati sotto l'azione di $Aut(\bar{M})$.

Alla luce di questi fatti, quando diremo che un modello o un sottoinsieme è "piccolo" intenderemo dire che ha cardinalità minore di k. Indichiamo con le lettere $A, B, \ldots$ e $M, N, \ldots$ rispettivamente insiemi e modelli "piccoli". Tali modelli verranno identificati come sottostrutture elementari del modello saturo $\bar{M}$.

Restringiamo il nostro interesse allo studio di questi modelli e, più in generale, agli insiemi definibili nel modello saturo $\bar{M}$. Mostriamo come sia possibile analizzare la "definibilità" in $\bar{M}$ studiando particolari sottogruppi di automorfismi di $\bar{M}$. Ricordiamo che con $Aut_A(\bar{M})$ denotiamo il sottogruppo degli automorfismi di $\bar{M}$ che fissano A puntualmente.

Per semplicità indichiamo con x sia una singola variabile sia una β-upla di variabili (se ciò non crea confusione). Adotteremo la stessa convenzione per β-uple di elementi a in $\bar{M}$. Scriveremo alle volte $\models \phi$ per qualche formula ϕ, sottointendendo $\bar{M} \models \phi$.

Lemma 2.2.2. *Sia $X \subseteq \bar{M}^m$ un insieme definibile e sia $A \subseteq \bar{M}$. Allora X è A-definibile se e solo se per ogni $f \in Aut_A(\bar{M})$, $f(X) = X$ (come insieme).*

Dimostrazione. Per l'implicazione da sinistra a destra è sufficiente osservare che se $\phi(x, a)$ definisce X e a è in A, allora $f(X)$ è l'insieme definito da $\phi(x, f(a))$.

Viceversa, sia $\phi(x, b)$ una formula che definisce X e consideriamo $p(y) = tp(b/A)$. Allora:

$$p(y) \models \forall x(\phi(x, y) \leftrightarrow \phi(x, b)) \ . \tag{2.2}$$

Infatti, se b' realizza p, per l'omogeneità di $\bar{M}$ esiste un automorfismo f che fissa A puntualmente (automorfismo di $(\bar{M}, a)_{a \in A}$) tale che $f(b) = b'$. Quindi

$f(X)$ è l'insieme definito da $\phi(x, f(b)) = \phi(x, b')$. Le nostre ipotesi implicano che $f(X) = X$. Quindi $\phi(x, b)$ e $\phi(x, b')$ definiscono entrambi X e l'equazione 2.2 è verificata.

Per compattezza, esiste una L_A-formula $\psi(y) \in p$ tale che

$$\models \forall y(\psi(y) \to \forall x(\phi(x, y) \leftrightarrow \phi(x, b))) \ .$$

Allora la formula $\sigma(x) = \exists y(\psi(y) \wedge \phi(x, y))$ è su A e definisce X. $\square$

Diciamo che una relazione di equivalenza su qualche insieme è *finita* se suddivide l'insieme in un numero finito di classi di equivalenza.

Definizione 2.2.3. Sia $X \subseteq \bar{M}^m$ un insieme definibile. Si dice che X è quasi-definibile su A se esiste una relazione di equivalenza finita E su $\bar{M}^n$ tale che E è A-definibile e X è unione di E-classi.

Quindi, se X è un insieme definito da una qualche formula $\phi(x)$, si dice che X è quasi-definibile su A se esiste una formula $\psi(x, y) \in \mathrm{L}_A$ tale che ψ definisce una relazione di equivalenza finita su $\bar{M}^n$ ed esistono $b_1, \ldots, b_k$ in $\bar{M}^n$ tali che risulti:

$$\models \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x, b_1) \vee \cdots \vee \psi(x, b_k))$$

e in particolare possiamo scegliere i b_i in X.

Lemma 2.2.4. *Sia $X \subseteq \bar{M}^m$ un insieme definibile e sia $A \subseteq \bar{M}$. Allora X è quasi-definibile su A se e solo se X ha un numero finito di immagini sotto l'azione di $Aut_A(\bar{M})$.*

Dimostrazione. Assumiamo che X sia quasi-definibile su A. Allora X è unione finita di E-classi dove E è una relazione di equivalenza A-definibile finita. Allora, ogni A-automorfismo di $\bar{M}$ agisce sulle E-classi e quindi, dato che queste sono in numero finito, l'orbita di X sotto l'azione di $Aut_A(\bar{M})$ è finita.

Viceversa, sia X definito da $\phi(x, b)$. Dato che X ha un numero finito di immagini sotto gli A-automorfismi di $\bar{M}$, esistono $b_1, \ldots, b_n$ tali che per ogni $f \in Aut_A(\bar{M})$, $f(X)$ è definito da $\phi(x, b_i)$ per qualche $i \leq n$. Definiamo la relazione di equivalenza finita:

$$E(x, y) \equiv \bigwedge_{i \leq n} \phi(x, b_i) \leftrightarrow \phi(y, b_i) \ .$$

Allora $E(x, y)$ è definibile e A-invariante (ogni A-automorfismo fissa ogni E-classe come insieme). Quindi $E(x, y)$ è A-definibile e X è unione di E-classi. $\square$

Definizione 2.2.5. Sia $A \subseteq \bar{M}$. Definiamo la chiusura definibile e algebrica di A in $\bar{M}$ come segue:

- $dcl(A)$ è l'insieme dei $b \in \bar{M}$ tali che esiste una L_A-formula $\phi(x)$ che verifica $\models \phi(b)$ e $\models \exists_{=1} x \phi(x)$ (cioè, ϕ ha un'unica "soluzione" in $\bar{M}$) ;

- $acl(A)$ è l'insieme dei $b \in \bar{M}$ tali che esiste una L_A-formula $\phi(x)$ ed esiste $n \in \mathbb{N}$ che verificano $\models \phi(b)$ e $\models \exists_{\leq n} x \phi(x)$ (cioè, ϕ ha un numero finito di "soluzioni" in $\bar{M}$).

Osservazione 2.2.6. I Lemmi 2.2.2 e 2.2.4 applicati a singoletti forniscono una caratterizzazione in termini di automorfismi della chiusura definibile e algebrica di un insieme. Sia $A \subseteq \bar{M}$ e $a \in \bar{M}$, allora:

- $a \in dcl(A) \Leftrightarrow a$ è fissato da ogni A-automorfismo di $\bar{M}$;

- $a \in acl(A) \Leftrightarrow a$ ha un numero finito di immagini sotto l'azione degli A-automorfismi di $\bar{M}$.

Sviluppiamo ora brevemente la teoria degli immaginari e definiamo la teoria T^{eq} nella quale essi hanno una naturale collocazione. Questi strumenti ci permetteranno di fornire una caratterizzazione in termini di automorfismi per la definibilità e la quasi-definibilità in $\bar{M}$. Per una trattazione più dettagliata si può guardare il capitolo 4 in [2] oppure il paragrafo 1 in [13].

Un linguaggio a più sorti del primo ordine è costituito da:

- un insieme di simboli di sorte S_i ;

- un insieme di simboli di funzione f e di relazione R nei quali viene specificato per ogni variabile di input la corrispondente sorte in cui essa varia.

Così, una L-struttura a più sorti M è costituita da una collezione di insiemi $S_i(M)$, detti sorti di M, nei quali vengono interpretati "correttamente" i simboli di funzione e relazione in L. Per esempio, se $R(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{L}$ è un simbolo di relazione dove le variabili x_i sono di sorte S_i, allora R^M sarà un sottoinsieme del prodotto cartesiano $S_1(M) \times \cdots \times S_n(M)$. Le L-formule si costruiscono nel modo usuale avendo però l'accortezza di specificare per ogni variabile la sorte in cui essa varia.

Data una L-teoria completa T e il suo modello saturo $\bar{M}$, definiamo la L^{eq}-struttura $\bar{M}^{eq}$ e la relativa teoria T^{eq}. Il linguaggio L^{eq} è costituito da:

- L ;

- un simbolo di sorte S_ϕ per ogni L-formula $\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ che definisce una relazione di equivalenza E in $\bar{M}$;

- un simbolo di funzione f_ϕ, per ogni L-formula ϕ come sopra, tale che, se scriviamo con $S_=$ la sorte per la relazione di uguaglianza (che identifichiamo con $\bar{M}$), f_ϕ ha variabili di input di sorte $S_=$ e variabili di output di sorte S_ϕ.

Definiamo T^{eq} come la L^{eq} teoria assiomatizzata da:

- T ;

- per ogni "relazione di equivalenza" $\emptyset$-definibile ϕ l'assioma:
  $\forall x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in S_=$
  $$\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \leftrightarrow f_\phi(x_1,\ldots,x_n) = f_\phi(y_1,\ldots,y_n)\ .$$

- per ogni "relazione di equivalenza" $\emptyset$-definibile ϕ l'assioma che esprime il fatto che f_ϕ è una funzione surgettiva.

A questo punto possiamo definire $\bar{M}^{eq}$ interpretando i simboli nel modo seguente:

- $S_=(\bar{M}^{eq}) = \bar{M}$;

- per ogni formula ϕ che definisce una relazione di equivalenza E, $S_\phi(\bar{M}^{eq}) = \bar{M}^n/E$ e per ogni $(a_1,\ldots,a_n) \in \bar{M}^n$, $f_\phi(\bar{M}^{eq})(a_1,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_n)/E$.

Gli elementi della forma b/E si chiamano immaginari. Elenchiamo i fatti principali riguardanti la teoria T^{eq}, rimandando ai già citati autori per ulteriori chiarimenti.

Lemma 2.2.7. *Con le notazioni di sopra,*

1. *i modelli di T^{eq} sono esattamente le strutture M^{eq} al variare di M tra i modelli di T ;*

2. *ogni isomorfismo tra due modelli M, N di T si estende ad un unico isomorfismo tra i modelli M^{eq}, N^{eq} ;*

3. *T^{eq} è completa ;*

4. *se a, b sono β-uple di elementi in due modelli M, N di T, tali che $tp_M(a) = tp_N(b)$, allora $tp_{M^{eq}}(a) = tp_{N^{eq}}(b)$;*

5. *per ogni L^{eq}-formula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, dove $x_i \in S_{E_i}$, esiste una L-formula $\phi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ tale che:*

$$T^{eq} \models \forall \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n(\phi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \leftrightarrow \psi(f_{E_1}(\bar{y}_1), \ldots, f_{E_n}(\bar{y}_n))) \ ;$$

6. *se M, N sono modelli di T tali che $M \prec N$, allora $M^{eq} \prec N^{eq}$;*

7. *$\bar{M}^{eq}$ è k-saturo e fortemente k-omogeneo.*

Possiamo pensare informalmente ad $\bar{M}^{eq}$ come ad un modo per "aggiungere" ad $\bar{M}$ dei *codici* per i suoi sottoinsiemi definibili. Infatti, ogni insieme definibile $X \subseteq \bar{M}^n$ "corrisponde" ad un elemento di $\bar{M}^{eq}$.

Supponiamo che X sia definito da una formula $\phi(x, b)$. Consideriamo la relazione di equivalenza $E(y_1, y_2) \equiv \forall x(\phi(x, y_1) \leftrightarrow \phi(x, y_2))$. Allora X è definito in $\bar{M}^{eq}$ dalla formula $\exists y(f_E(y) = b/E \wedge \phi(x, y))$. In quest'ottica, b può essere visto come un rappresentante per la classe di equivalenza degli elementi che definiscono X tramite ϕ. L'elemento immaginario b/E è detto *codice* per X. In generale, un codice per X non è unico e dipende dalla particolare formula scelta per definire X. Osserviamo che, considerando la parte (2) del Lemma 2.2.7, per ogni automorfismo α di $\bar{M}$, $\alpha(X) = X$ come insieme se e solo se $\alpha(b/E) = b/E$.

Definizione 2.2.8. (i) Sia M una L-struttura e sia $X \subseteq M^n$ un insieme definibile. Diciamo che una n-upla c in M codifica X (oppure c è un codice per X) se per ogni automorfismo α di M, $\alpha(X) = X$ come insieme se e solo se $\alpha(c) = c$.
(ii) Diciamo che la teoria T elimina gli immaginari se ogni insieme definibile X in $\bar{M}$ ha un codice in $\bar{M}$.

Lemma 2.2.9. *T^{eq} elimina gli immaginari.*

Dimostrazione. Sia E' una relazione di equivalenza $\emptyset$-definibile nella sorte S_E di $\bar{M}^{eq}$. Allora, in base al punto (5) del Lemma 2.2.7, esiste una formula $\phi(y_1, y_2)$, con le variabili della lunghezza appropriata, tale che $M^{eq} \models \forall y_1, y_2(\phi(y_1, y_2) \leftrightarrow E'(f_E(y_1), f_E(y_2)))$. Quindi la formula ϕ definisce una relazione di equivalenza in $\bar{M}$ che permette, associando ogni $(c/E)/E'$ a c/ϕ, di identificare la sorte S_E/E' di $(\bar{M}^{eq})^{eq}$ con la sorte S_ϕ di $\bar{M}^{eq}$.

Ora, ogni insieme definibile X in $\bar{M}^{eq}$ ha un codice c in $(\bar{M}^{eq})^{eq}$ e, per il ragionamento precedente, c può essere preso in M^{eq}. □

Possiamo riassumere questi risultati dicendo che ogni struttura ha un'espansione definibile che elimina gli immaginari. Inoltre, come già osservato in precedenza, tale espansione conserva molte proprietà, riassunte nel Lemma 2.2.7.

Vediamo ora come, passare all'espansione M^{eq} di una struttura M fornisce un "naturale" luogo dove guardare le interpretazioni in M. In particolare, mostriamo che se un gruppo G è interpretabile in M allora G è isomorfo a un gruppo definibile in M^{eq}. Per una trattazione più ampia delle relazioni che intercorrono tra le interpretazioni e la definibilità in M^{eq} si può guardare il capitolo 5 in [2].

Definizione 2.2.10. Siano G un gruppo ed M una L-struttura. Diciamo che G è un gruppo definibile in M se esiste un intero $n > 0$ ed esistono L-formule, possibilmente con parametri in M, $\phi_=(\bar{x})$ e $\phi_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sono tre n-uple di variabili) tali che

$$G = \{\bar{m} \in M^n : M \models \phi_=(\bar{m})\}$$

e il grafico dell'operazione di gruppo su G coincide con l'insieme

$$P_G = \{(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3) \in G^3 : M \models \phi_p(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)\}.$$

Teorema 2.2.11. *Sia G un gruppo interpretabile in una struttura M. Allora esiste un gruppo $\bar{G}$ definibile in M^{eq} ed esiste un isomorfismo di gruppi $\alpha : \bar{G} \to G$.*

Dimostrazione. Sia Γ un'interpretazione n-dimensionale di G in M (Esempio 1.2.4). Allora esiste un sottoinsieme definibile $\tilde{G} \subseteq M^n$, esistono L_M-formule $\phi_=(\bar{x}, \bar{y}), \phi_1(\bar{x}), \phi_{molt}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ed esiste una funzione surgettiva $f : \tilde{G} \to G$ tale che $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \tilde{G}$ risulta:

- $M \models \phi_=(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$;
- $M \models \phi_1(\bar{x}) \Leftrightarrow f(\bar{y}) = 1$;
- $M \models \phi_{molt}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = f(\bar{z})$.

Eventualmente aggiungendo un numero finito di costanti nel linguaggio di M, possiamo supporre che ogni formula che occorre nella formazione dell'interpretazione per G in M sia sul $\emptyset$. Allora la formula $\phi_=(\bar{x}, \bar{y})$ è una relazione di equivalenza E, $\emptyset$-definibile su M^n. Sia S_E la relativa sorte di M^{eq}. Definiamo $\bar{G}$ in M^{eq} come l'insieme degli immaginari $[\bar{x}]$ in S_E che hanno un rappresentante $\bar{x}$ in $\tilde{G}$. Allora possiamo definire un'operazione di gruppo $*$ su $\bar{G}$ nel seguente modo: per ogni $[\bar{x}], [\bar{y}], [\bar{z}]$ in $\bar{G}$, risulta $[\bar{x}] * [\bar{y}] = [\bar{z}]$ se e solo se $M \models \phi_{molt}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Se per ogni $[\bar{x}]$ in $\bar{G}$ poniamo $\alpha([\bar{x}]) = f(\bar{x})$, cioè definiamo α tramite un rappresentante, si verifica facilmente che α è un isomorfismo tra i gruppi $(\bar{G}, *)$ e G. $\square$

Vediamo ora come passare da T a T^{eq}, e quindi sostanzialmente da $\bar{M}$ a $\bar{M}^{eq}$, fornisce un modo per studiare gli insiemi definibili tramite appropriati gruppi di automorfismi. Ricordiamo che ogni automorfismo di $\bar{M}$ si estende ad un unico automorfismo di $\bar{M}^{eq}$ (Lemma 2.2.7). Nel seguito, i due gruppi di automorfismi, saranno spesso confusi (o se si vuole, identificati).

In accordo con la Definizione 2.2.5, se $A \subseteq \bar{M}^n$ indichiamo con:

- $dcl^{eq}(A)$ la chiusura definibile di A in $\bar{M}^{eq}$;
- $acl^{eq}(A)$ la chiusura algebrica di A in $\bar{M}^{eq}$.

Il seguente lemma è da leggere in riferimento ai Lemmi 2.2.2 e 2.2.4

Lemma 2.2.12. *Sia $X \subseteq \bar{M}^n$ un insieme definibile e sia c un codice per X in $\bar{M}^{eq}$ (osserviamo che X è definibile su c). Allora:*

1. *X è definibile su A se e solo se $c \in dcl^{eq}(A)$.*
2. *X è quasi-definibile su A se e solo se X è $acl^{eq}(A)$-definibile in $\bar{M}^{eq}$.*

Dimostrazione. (1) X è definibile su A sse ogni A-automorfismo fissa X come insieme sse ogni A-automorfismo fissa c sse $c \in dcl^{eq}(A)$.
(2) Se X è quasi-definibile su A, allora X ha un numero finito di immagini sotto gli A-automorfismi. Quindi c ha un numero finito di immagini sotto gli A-automorfismi, cioè $c \in acl^{eq}(A)$ e X è $acl^{eq}(A)$-definibile in $\bar{M}^{eq}$.

Viceversa, se X è $acl^{eq}(A)$-definibile, allora ogni $acl^{eq}(A)$-automorfismo fissa X come insieme e quindi fissa c. Cioè, $c \in dcl^{eq}(acl^{eq}(A)) = acl^{eq}(A)$. Allora c ha un numero finito di immagini sotto gli A-automorfismi e quindi anche X. Cioè, X è quasi-definibile su A. □

Osservazione 2.2.13. Se X è un insieme definibile e se c è un codice per X, dalla dimostrazione del punto (2) nel Lemma 2.2.12 si ottiene:

$$X \text{ è quasi-definibile su } A \text{ se e solo se } c \in acl^{eq}(A)$$

Osservazione 2.2.14. In generale un codice per un insieme definibile X non è unico in quanto dipende dalla particolare formula considerata per definire X. Tuttavia, in base al Lemma 2.2.12, se c, d sono due codici per X, allora ogni automorfismo fissa c sse fissa X come insieme sse fissa d. Quindi risulta $c \in dcl^{eq}(d)$ e $d \in dcl^{eq}(c)$, cioè un codice è unico a meno di interdefinibilità. In particolare esiste un unico insieme definibilmente chiuso C in $\bar{M}^{eq}$ tale che ogni automorfismo fissa X come insieme sse fissa C "puntualmente". Un tale insieme si dice una *base* per l'insieme definibile X.

2.3 Teorie stabili e forking

In questo paragrafo viene data la definizione di teoria stabile con qualche condizione equivalente. Viene inoltre definita la relazione di forking nelle teorie stabili partendo da un'analisi "locale" per poi generalizzare. L'impostazione scelta si trova nel capitolo 1 in [4].

Sia T una L-teoria completa. In relazione a quanto visto nel Paragrafo 2.1, fissiamo un cardinale "grande" k ed un modello $\bar{M}$ di T k-saturo e fortemente k-omogeneo. Restringendo il nostro studio a modelli di cardinalità minore di k, possiamo considerare $\bar{M}$ come "universo" in cui lavorare. In particolare, se non diversamente specificato, quando scriviamo $M, N, \ldots$ e $A, B, \ldots$ ci riferiamo rispettivamente a sottostrutture elementari e sottoinsiemi di $\bar{M}$ di cardinalità minore di k. Se ϕ è un enunciato, alle volte, scriveremo $\models \phi$ in luogo di $\bar{M} \models \phi$. Se non diversamente specificato, indichiamo rispettivamente con x ed a sia singole variabili ed elementi, che β-uple di variabili ed elementi (per $\beta < k$).

Una L-formula $\delta(x, y)$ si dice **stabile** per T se $\delta(x, y)$ non definisce un "ordine infinito" in nessun modello di T. Più precisamente, $\delta(x, y)$ è stabile per T se non esiste una successione infinita $(a_i, b_i : i < \omega)$ in $\bar{M}$ tale che risulti:

$$\models \delta(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \leq j \ .$$

Definizione 2.3.1. La teoria T si dice stabile se ogni formula è stabile per T.

Esempio 2.3.2. (i) Nella teoria completa dell'aritmetica di Presburger $(\mathbb{N}, 0, s, +)$ la formula

$$\phi(x, y) \equiv \exists z \neq 0 (x + z = y)$$

non è stabile, infatti per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ risulta $\exists z \neq 0 \ (n + z = m) \Leftrightarrow n < m$ e questo, essendo l'ordine usuale, ha tipo d'ordine ω .
(ii) La stessa formula non definisce un ordine (e quindi è stabile) in $(\mathbb{Z}, +)$. Come vedremo, ogni formula è stabile in $Th(\mathbb{Z}, +)$ (cioè, $Th(\mathbb{Z}, +)$ è stabile).

In generale, la stabilità di una formula dipende dalla "suddivisione" delle variabili considerata. Il seguente lemma, di facile dimostrazione, fornisce qualche utile proprietà delle formule stabili.

Lemma 2.3.3. *(i) Se $\phi(x, y)$ e $\psi(x, z)$ sono formule stabili per T, allora le formule $\neg\phi(x, y)$, $\phi \wedge \psi(x, yz)$ e $\phi \vee \psi(x, zy)$ sono stabili per T.*
(ii) (Simmetria) Sia $\psi(y, x)$ la formula $\phi(x, y)$. Allora $\psi(y, x)$ è stabile per T se e solo se $\phi(x, y)$ è stabile per T. Chiameremo $\psi(y, x)$ la formula simmetrica di $\phi(x, y)$.

(iii) Se T è stabile, allora T^{eq} è stabile.
(iv) (Compattezza) Una formula $\phi(x, y)$ è stabile per T se e solo se esiste $n < \omega$ tale che non esiste una successione $(a_i, b_i : i \leq n)$ in $\bar{M}$ che verifica $\models \delta(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \leq j$.

Ricordiamo dal Paragrafo 2.1 che, se A è un insieme in $\bar{M}$, indichiamo con $S_n(A)$ o semplicemente con $S(A)$, l'insieme degli n-tipi completi di T con parametri in A.

Definizione 2.3.4. Sia M un modello di una teoria completa T. Un tipo $p \in S(M)$ si dice definibile, se per ogni formula $\delta(x, y)$, esiste una formula $\psi_\delta(y)$ tale che, per ogni b in M risulta:

$$\delta(x, b) \in p \Leftrightarrow \models \psi_\delta(b) \ .$$

La formula ψ_δ si chiama δ-definizione per p ed è unica a meno di equivalenza. Se A è un insieme di parametri, diciamo che p definibile su A (quasi-definibile su A) se per ogni $\delta(x, y)$, la δ-definizione di p è su A (quasi su A).

Sia $\delta(x, y)$ una L-formula. Chiamiamo istanza di δ una formula della forma $\delta(x, b)$, per qualche b. Un δ-tipo completo di T su A è una collezione coerente massimale di δ-formule su A, cioè di formule su A che sono equivalenti a combinazioni booleane finite di istanze di δ (non necessariamente su A). Scriviamo con $S_\delta(A)$ l'insieme dei δ-tipi di T su A. Se $p \in S(B)$ ed A è un sottoinsieme di B, indichiamo con $p \restriction A$ l'insieme di formule $\phi \in p$ tali che ϕ sia A-definibile. Osserviamo che $p \restriction A \in S(A)$.

Osservazione 2.3.5. Sia p un tipo di T. Diciamo che un insieme di formule Γ *determina* p (oppure p è determinato da Γ) se p è conseguenza di Γ, cioè se risulta $T \cup \Gamma \models p$. Se M è un modello, allora ogni δ-tipo $p \in S_\delta(M)$ è determinato dall'insieme di istanze e negazioni di istanze di δ che sono in p. Questo perchè se una δ-formula è su M allora essa è equivalente ad una combinazione booleana finita di istanze di δ su M. Infatti, sia

$$\Psi(x, \bar{b}) = \bigvee_j \bigwedge_k (\delta^i(x, b_{j,k}))$$

una δ-formula equivalente ad una formula $\psi(x, c)$ dove i parametri c sono in M (quando scriviamo δ^i intendiamo dire che i vale 0 o 1, $\delta^0 = \delta$ e $\delta^1 = \neg\delta$). Allora:

$$\bar{M} \models \exists \bar{y}[\forall x(\psi(x, c) \leftrightarrow \Psi(x, \bar{y}))]$$

e dato che c è in M e $M \preceq \bar{M}$ risulta:

$$M \models \exists \bar{y}[\forall x(\psi(x, c) \leftrightarrow \Psi(x, \bar{y}))].$$

Quindi $\psi(x,c)$ equivale a una combinazione booleana finita di istanze di δ in M e ogni δ-tipo p su M è determinato dalle istanze e negazioni di istanze di δ che sono in p.

Vediamo come la stabilità di T può essere espressa tramite condizioni sulla cardinalità e sulla definibilità dei tipi di T.

La dimostrazione del seguente lemma è un pò tecnica (anche se non difficile). La presentiamo forse con un "eccesso" di dettagli in quanto, essendo costruttiva, mostra chiaramente come, l'ipotesi di stabilità permette di costruire una δ-definizione per un tipo completo.

Lemma 2.3.6. *Sia $\delta(x,y)$ una L-formula stabile per T. Siano M un modello di T e $p(x) \in S(M)$. Allora:*

1. *p ha una delta definizione $\psi_\delta(y)$ che è equivalente ad una combinazione booleana positiva di formule della forma $\delta(c,y)$, con c in M ;*

2. *se $A \subseteq M$ ed M è $|A|^+$-saturo, allora esiste una successione $(c_i : i \leq n)$ in M tale che:*

   - *per ogni i, c_{i+1} realizza $p \restriction A \cup \{c_1, \ldots, c_i\}$;*
   - *ψ_δ è equivalente ad una combinazione booleana positiva di formule della forma $\delta(c_i, y)$.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione del punto (1), i fatti enunciati in (2) saranno direttamente deducibili da tale dimostrazione.

Sia a una n-upla in $\bar{M}$ che realizza p, cioè $p(x) = tp(a/M)$. Allora, per ogni b in M risulta:

$$\delta(x,b) \in p \Leftrightarrow \models \delta(a,b) \ .$$

Per concludere, è sufficiente provare la seguente affermazione.

Claim 1: Esiste $N < \omega$ ed esiste una successione finita di n-uple $(a^i_j : i,j \leq N)$ in M tale che, per ogni $b \in M$ risulta:

$$\models \delta(a,b) \Leftrightarrow M \models \bigvee_j (\bigwedge_i \delta(a^i_j, b)) \ .$$

dim. Dal Lemma 2.3.3 (iv), sia $N_1 < \omega$ tale che non esiste una successione $((a_i, b_i) : i \leq N_1)$ tale che $\models \delta(a_i, b_j)$ sse $i < j$.

claim 2: per ogni $\psi(x) \in tp(a/M)$, esiste $m \leq N_1$ ed esistono n-uple $a_1, \ldots, a_m$ in M tali che:

- ogni a_i realizza $\psi(x)$;

- per ogni b in M, $\models \bigwedge_{i \leq m} \delta(a_i, b) \Rightarrow \models \delta(a, b)$.

dim. costruiamo successioni a_i, b_i tali che:

1. a_i, b_i sono in M ;
2. ogni a_i realizza $\psi(x)$;
3. ogni b_i è tale che $\models \neg\delta(a, b_i)$;
4. $\models \delta(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \leq j$.

Supponiamo induttivamente di aver definito $a_1, \ldots, a_s$ e $b_1, \ldots, b_s$. Sia $\psi(x) \in tp(a/M)$. Per la clausola (3) la formula $\psi(x) \wedge (\bigwedge_{i \leq s} \neg\delta(x, b_i))$ è realizzata da a e quindi è coerente. Dato che tale formula è su M, essa è realizzata da una n-upla a_{s+1} in M (osserviamo però che sotto ipotesi di saturazione su M si può scegliere a_{s+1} in M che realizza $tp(a/\{a_1, \ldots, a_s\})$).

Ora, se la successione $a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}$ soddisfa claim 1, si finisce. Altrimenti, esiste b_{s+1} in M tale che $\models \bigwedge_{i \leq s+1} \delta(a_i, b_{s+1})$ e $\models \neg\delta(a, b_{s+1})$. Allora le successioni $a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}$ e $b_1, \ldots, b_s, b_{s+1}$ soddisfano le condizioni (1),(2),(3) e (4) e quindi la costruzione continua.

Per la clausola (4) tale costruzione non può continuare all'infinito e si deve arrestare ad un passo $s \leq N_1$. Quindi il claim 2 è provato.

Torniamo alla dimostrazione del Claim 1. Consideriamo la formula:

$$\chi(\bar{x}, y) = \delta(x_1, y) \wedge \ldots \wedge \delta(x_{N_1}, y) \ .$$

Ancora dal Lemma 2.3.3, $\neg\chi$ è stabile ed esiste $N_2 < \omega$ tale che non esiste una successione $((\bar{a}^i, b_i) : i \leq N_2)$ tale che $\models \neg\chi(\bar{a}^i, b_j) \Leftrightarrow i < j$.

Costruiamo successioni $\bar{a}^i, b_i$ tali che:

1. ogni $\bar{a}^i, b_i$ è in M ;
2. ogni $\bar{a}^i = (a^i_1, \ldots, a^i_{N_1})$ soddisfa claim 1 ;
3. per ogni i risulta $\models \delta(a, b_i)$;
4. $\models \neg\chi(\bar{a}^i, b_j) \Leftrightarrow i < j$.

Supponiamo induttivamente di aver già definito $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^s$ e $b_1, \ldots, b_s$. Per la condizione (3), la formula $\psi(x) = \delta(x, b_1) \wedge \ldots \wedge \delta(x, b_s)$ è in $tp(a/M)$. Per claim 1, esiste $\bar{a}^{s+1}$ tale che per ogni $i < N_1$, $\models \psi(a^{s+1}_i)$ e quindi, riordinando i fattori, per ogni $i \leq s$, $\models \chi(\bar{a}^{s+1}, b_i)$. Inoltre, per ogni b in M risulta:

$$\models \chi(\bar{a}^{s+1}, b) \Rightarrow \models \delta(a, b) \ .$$

Allora, se la formula $\bigvee_{i\leq s+1}\chi(\bar{a}^i,y)$ non soddisfa Claim 1, esiste b_{s+1} in M tale che $\models\delta(a,b_{s+1})$ e, per ogni $i\leq s+1$, $\models\neg\chi(\bar{a}^i,b_{s+1})$.

Quindi, le successioni $(\bar{a}^1,\ldots,\bar{a}^s,\bar{a}^{s+1})$ e $(b_1,\ldots,b_s,b_{s+1})$ continuano la costruzione. Per la clausola (4) la costruzione si deve arrestare ad un passo $s\leq N_2$. Cioè, esiste una successione finita in M, $(\bar{a}^1,\ldots,\bar{a}^{N_2})$ tale che, per ogni b in M risulta:

$$\models\delta(a,b)\Leftrightarrow\models\bigvee_{i\leq N_2}\chi(\bar{a}^i,b)\ .$$

Ciò conclude la dimostrazione di Claim 1 e del Lemma. □

Osservazione 2.3.7. Osserviamo che il Lemma 2.3.6 prova inoltre che, se δ è stabile, allora ogni δ-tipo completo su un modello ha una delta definizione.

Lemma 2.3.8. *Sia $\delta(x,y)$ una formula. Sono equivalenti:*

1. *$\delta(x,y)$ è stabile per T;*

2. *per ogni modello M di T, ogni tipo $p\in S(M)$ ha una δ-definizione ;*

3. *per ogni cardinale $\lambda\geq|T|$ e per ogni modello M di T tale che $|M|\leq\lambda$, risulta $|S_\delta(M)|\leq\lambda$.*

Dimostrazione. $(1\rightarrow 2)$ è il Lemma 2.3.6 .
$(2\rightarrow 3)$ ogni δ-tipo $p\in S_\delta(M)$ è determinato dalla sua δ-definizione. Infatti, se p_1,p_2 sono δ-tipi completi su M e se ψ_δ e ϕ_δ sono δ-definizioni per p_1 e p_2, allora risulta:

$$\psi_\delta\equiv\phi_\delta\Leftrightarrow p_1=p_2\ .$$

Per concludere è sufficiente osservare che vi sono al più $|M|+|T|$ possibili δ-definizioni per p.
$(3\rightarrow 1)$ supponiamo $\delta(x,y)$ instabile e mostriamo che, per ogni $\lambda\geq|T|$ esiste un modello M, con $|M|\leq\lambda$, tale che $|S_\delta(M)|>\lambda$. Per prima cosa osserviamo che, per compattezza, se $\delta(x,y)$ è instabile allora, per ogni ordinale infinito α, esiste una successione $((a_i,b_i):i<\alpha)$ tale che $\models\delta(a_i,b_j)$ sse $i<j$. Quindi, sia $\lambda>|T|$ e sia μ il più piccolo cardinale tale che $2^\mu>\lambda$ (in particolare $\mu\leq\lambda$). Consideriamo l'insieme ${}^\mu 2$ delle funzioni da μ in $\{0,1\}$ con l'ordine lessicografico. Allora esiste una successione $((a_f,b_f):f\in{}^\mu 2)$ tale che $\models\delta(a_f,b_g)$ sse $f<g$. Sia X il sottoinsieme denso in ${}^\mu 2$ delle funzioni definitivamente costanti. Osserviamo che

$$|X|=|\bigcup_{\nu<\mu}\mathcal{P}(\nu)|$$

e quindi $|X| \leq \lambda$ in quanto, per la scelta di μ risulta, per ogni $\nu < \mu$, $2^\nu \leq \lambda$. Dato che X è denso, per ogni $f_1 < f_2$ esiste $g \in X$ tale che $f_1 < g < f_2$ e, in particolare, risulta

$$\models \delta(a_{f_1}, b_g) \wedge \neg\delta(a_{f_2}, b_g) \ . \tag{2.3}$$

Sia M un modello di cardinalità λ contenente $\{b_g : g \in X\}$ (Lowenheim-Skolem). Allora l'insieme P dei $tp_\delta(a_f/M)$ al variare di f in ${}^\mu 2$ è contenuto in $S_\delta(M)$ e ha cardinalità $2^\mu > \lambda$ in quanto, per (2.3), i δ-tipi in P sono a due a due distinti. □

Corollario 2.3.9. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *T è stabile;*
2. *se $M \models T$, ogni tipo $p(x) \in S(M)$ è definibile;*
3. *esiste un cardinale $\lambda \geq |T|$ tale che, per ogni modello M di T con $|M| \leq \lambda$, risulta $|S(M)| \leq \lambda$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal lemma 2.3.8 osservando per (2)→(3) che, in generale, se un tipo su un modello M è definibile, allora esso è determinato dal suo schema di definizione (cioè dalla mappa che ad ogni $\delta(x, y)$ associa una δ-definizione ψ_δ per il tipo). Quindi dato che il numero dei possibili schemi di definizione su M non supera $|M|^{|T|}$, se λ è tale che $\lambda^{|T|} = \lambda$, allora per ogni modello M di cardinalità al più λ risulta:

$$|S(M)| \leq |M|^{|T|} = \lambda^{|T|} = \lambda.$$

□

Esempio 2.3.10. (i) Come già osservato nell' Esempio 2.3.2, la teoria completa dell'aritmetica di Presburger $(\mathbb{N}, s, 0, +)$ non è stabile.
(ii) Se consideriammo l'anello degli interi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, dato che ogni intero positivo è somma di quattro quadrati, possiamo definire:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \exists y_1, y_2, y_3, y_4(x = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \ .$$

Allora l'ordine usuale è definibile ponendo $x < y$ se e solo se $y - x > 0$. In particolare, questa la teoria completa di questa struttura non è stabile. Le strutture $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +)$ sono molto diverse tra loro. Nel Paragrafo 2.5 vedremo che $Th(\mathbb{Z}, +)$, come la teoria completa di ogni modulo, è stabile.

Iniziamo ora il lavoro che ci porterà alla definizione della relazione di "forking" per i tipi completi di una teoria stabile. Fissiamo una teoria stabile T e indichiamo con $\bar{M}$ il suo monster model. Siano x, y succesioni di variabili e sia Δ un insieme di L-formule della forma $\delta(x, y)$. Chiamiamo Δ-formula una combinazione booleana finita di istanze e negazioni di istanze di formule in Δ (le variabili che vengono istanziate sono le y). Un Δ-tipo completo è un insieme massimale coerente di Δ-formule. Se M è un modello, indichiamo con $S_\Delta(M)$ l'insieme dei Δ-tipi completi su M. Il seguente lemma mostra come l'insieme $S_\Delta(M)$ può essere dotato di una struttura di spazio topologico. Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *totalmente disconnesso* se ha una base di "clopen" (insiemi contemporaneamente aperti e chiusi).

Lemma 2.3.11. *Esiste una topologia τ su $S_\Delta(M)$ tale che $(S_\Delta(M), \tau)$ è uno spazio topologico di Hausdorff, compatto e totalmente disconnesso.*

Dimostrazione. Definiamo τ come la topologia generata dagli aperti $[\phi]$, al variare di ϕ tra le Δ-formule su M, dove poniamo per definizione:

$$[\phi] = \{p \in S_\Delta(M) : \phi(x) \in p\} \ .$$

Osserviamo che, per ogni aperto base $[\phi]$, $[\phi]^c = [\neg\phi]$ e quindi questo spazio è totalmente disconnesso. Inoltre, se p, q sono Δ-tipi distinti, allora esiste una Δ-formula ϕ tale che $\phi \in p$ e $\neg\phi \in q$. Quindi $p \in [\phi]$, $q \in [\neg\phi]$ e chiaramente $[\phi] \cap [\neg\phi] = \emptyset$, cioè tale spazio è di Hausdorff. Mostriamo che è compatto.

Sia $\{[\phi_i] : i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $S_\Delta(M)$. Sia $\Gamma = \{\neg\phi_i : i \in I\}$. Allora ogni tipo contiene qualche ϕ_i e nessun tipo contiene Γ. Quindi Γ è incoerente. Per compattezza esiste un sottoinsieme finito Γ' incoerente. Allora ogni tipo contiene almeno una ϕ tale che $\neg\phi \in \Gamma'$ e quindi l'insieme $\{[\phi] : \neg\phi \in \Gamma'\}$ è un sotto-ricoprimento finito. □

In uno spazio topologico X un punto x_0 si dice *isolato* se esiste un intorno I_{x_0} che "separa" x_0 dagli altri punti di X, cioè se risulta $I_{x_0} \cap X = \{x_0\}$.

In uno spazio topologico X di Hausdorff, compatto e totalmente disconnesso si può definire la nozione di rango di Cantor-Bendixon. Per gli elementi $p \in X$, $CB(p)$ è definito induttivamente dalle seguenti clausole:

- $CB(p) \geq 0$ per ogni p;
- $CB(p) \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow p$ non è isolato nello spazio $\{q \in X : CB(p) \geq \alpha\}$;
- $CB(p) \geq \lambda \Leftrightarrow \forall\alpha < \lambda,\ CB(p \geq \alpha)$

Diciamo che $CB(p) < \infty$ se esiste α tale che $CB(p) \geq \alpha$ e $CB(p) \not\geq \alpha+1$. Se per ogni $p \in X$, $CB(p) < \infty$ allora esiste un elemento in X di rango massimo α ed inoltre $X_\alpha = \{p \in X : CB(p) = \alpha\}$ è finito. In questo caso si pone $CB(X) = \alpha$ e il numero $|X_\alpha|$ si chiama grado di X. Per la dimostrazione del seguente lemma si può guardare il Lemma 2.6 in [4].

Lemma 2.3.12. *Sia $\Delta(x)$ un insieme finito di formule stabili per T. Sia M un modello e consideriamo lo spazio $S_\Delta(M)$. Allora per ogni $p \in S_\Delta(M)$ risulta $CB(p) < \infty$.*

Osserviamo che il risultato nel Lemma 2.3.12 non vale in generale per lo spazio $S(M)$, dove M è un modello della teoria stabile T. Le teorie tali che ogni tipo in $S(M)$ ha rango finito si chiamano teorie *totalmente trascendenti* e verranno trattate nel paragrafo 2.6.

La definizione di relazione di forking fra i tipi completi di T, sarà in un certo senso "dedotta" da un'analisi "locale" sui δ-tipi di T. Ricordiamo che, dal Corollario 2.3.9, in una teoria stabile ogni tipo completo su un modello è definibile. Ciò è vero anche se consideriamo δ-tipi, cioè ogni δ-tipo su un modello ha una δ-definizione (Osservazione 2.3.7).

Lemma 2.3.13. *Sia $\delta(x, y)$ una formula. Siano $p(x) \in S(A)$ ed M un modello contenente A. Allora esiste un δ-tipo completo $q(x) \in S_\delta(M)$ tale che:*

1. *$p(x) \cup q(x)$ è coerente ;*

2. *q è quasi-definibile su A (equivalentemente, la δ-definizione di q è su $acl^{eq}(A)$).*

Dimostrazione. Dal Lemma 2.3.11, $S_\delta(\bar{M})$ è uno spazio topologico compatto, di Hausdorff e totalmente disconnesso. Inoltre, in un tale spazio è definibile il rango di Cantor-Bendixon e, per il Lemma 2.3.12, per ogni $p \in S_\delta(\bar{M})$, risulta $CB(p) < \infty$.

Sia $p \in S(A)$. Consideriamo il sottospazio $X = \{q \in S_\delta(\bar{M}) : q \cup p \text{ } e' \text{ } coerente\}$. Con la topologia indotta, X risulta uno spazio compatto, di Hausdorff e totalmente disconnesso e inoltre per ogni $q \in X$, $CB_X(q) < \infty$. Sia X_0 il sottoinsieme finito dei tipi $q \in X$ di rango massimo. Osserviamo che $Aut_A(\bar{M})$ agisce su X_0, in quanto fissa p e "preserva" il rango. Sia $q \in X_0$. Dal Lemma 2.3.6, q ha una δ-definizione ψ_δ. Dato che, per ogni $\alpha \in Aut_A(\bar{M})$, $\alpha(\psi_\delta)$ è la δ-definizione di $\alpha(q)$ e dal fatto che tali automorfismi agiscono su X_0 e X_0 è finito, segue che $\{\alpha(\psi_\delta) : \alpha \in Aut_A(\bar{M})\}$ è finito. Quindi, per il Lemma 2.2.4 nel capitolo 1, q è quasi-definibile su A.

La tesi segue considerando $q' = q \restriction M$. □

Osservazione 2.3.14. Segue dal Lemma 2.3.13 che, se p è un δ-tipo completo su A e se M è un modello contenente A, allora esiste un δ-tipo completo q su M che estende p, la cui δ-definizione è su $acl^{eq}(A)$.

Sia $\delta(x, y)$ una formula. Indichiamo con $\epsilon(y, x)$ la formula $\delta(x, y)$ (cioè leggiamo le x come variabili "parametro" e le y come variabili "libere"). Dal

Lemma 2.3.6 sappiamo che, se $p \in S_\delta(M)$ allora la δ-definizione di p è una ϵ-formula e viceversa, se $q \in S_\epsilon(M)$ allora la sua ϵ-definizione è una δ-formula. Diciamo che $\epsilon(y,x)$ è la formula *simmetrica* di $\delta(x,y)$.

Lemma 2.3.15. *Siano $\delta(x,y)$ una formula e $\epsilon(y,x)$ la sua simmetrica. Siano M un modello, $p(x) \in S_\delta(M)$ e $q(y) \in S_\epsilon(M)$. Siano inoltre $\psi(y)$ una δ-definizione per p e $\chi(x)$ una ϵ-definizione per q. Allora $\chi(x) \in p(x)$ se e solo se $\psi(y) \in q(y)$.*

Dimostrazione. Per prima cosa consideriamo un'estensione elementare M' di M, $|M|^+$-satura ($\bar{M}$ se si vuole). Sia $p' \in S_\delta(M')$ l'estensione di p su M' "determinata" da ψ, cioè per ogni $b \in M'$, $\delta(x,b) \in p'$ sse $M' \models \psi(b)$. Sia $q' \in S_\epsilon(M')$ l'estensione di q determinata da χ.

Supponiamo per assurdo che risulti, ad esempio, $\chi(x) \in p$ e $\neg\psi(y) \in q$. Costruiamo induttivamente una successione $((a_i, b_i) : i < \omega)$ in M' tali che:

- a_{i+1} realizza $p' \restriction A \cup \{a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i\}$;
- b_{i+1} realizza $q' \restriction A \cup \{a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i\}$.

Claim: $M' \models \delta(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$.
dim. Per ogni i, indichiamo con $B_i = A \cup \{a_0, b_0, \ldots, a_{i-1}, b_{i-1}\}$. Sia $i < j$. Allora $B_i \subseteq B_j$ e a_i realizza $p' \restriction B_i$. Quindi $M' \models \psi(a_i)$ e $\epsilon(y, a_i) = \delta(a_i, y) \in q' \restriction B_j$. Ma b_j realizza $q' \restriction B_j$ e quindi $M' \models \delta(a_i, b_j)$.

In modo simile si prova che, se $i \geq j$, allora $M' \models \neg\delta(a_i, b_j)$. Questo prova il Claim.

Per la stabilità di $\delta(x,y)$ si giunge ad un assurdo. □

Corollario 2.3.16. *Sia $\delta(x,y)$ una formula. Siano M un modello e $p_1, p_2 \in S_\delta(M)$. Sia A un insieme algebricamente chiuso in M^{eq} e supponiamo che p_1 e p_2 siano entrambi definibili su A. Supponiamo inoltre che $p_1 \restriction A = p_2 \restriction A$. Allora $p_1 = p_2$.*

Dimostrazione. Siano $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ rispettivamente δ-definizioni per p_1 e p_2. Per ipotesi ψ_1 e ψ_2 sono su A e osserviamo che, se indichiamo con $\epsilon(y,x)$ la simmetrica di $\delta(x,y)$, allora ψ_1 e ψ_2 sono ϵ-formule. Mostriamo che $\psi_1 \equiv \psi_2$.

Sia b in M tale che $M \models \psi_1(b)$ e consideriamo $q(y) = tp(b/A)$. Per il Lemma 2.3.13, sia $q' \in S_\epsilon(M)$ tale che:

- $q \cup q'$ è coerente ;
- la ϵ-definizione $\chi(x)$ di q' è su A (A è algebricamente chiuso in M^{eq}).

Dal fatto che ψ_y è su A e $\psi_1 \in q$, segue che $\psi_1 \in q'$. Per simmetria (Lemma 2.3.15) $\chi(x) \in p_1$ e, dato che $\chi(x)$ è su A, risulta $\chi \in p_2$ ($p_1 \restriction A = p_2 \restriction A$). Ancora per simmetria, $\psi_2(y) \in q'$ e quindi, dato che ψ_2 è su A, $\psi_2 \in q$. Quindi $M \models \psi_2(b)$. $\square$

Sia A un insieme eq-algebricamente chiuso ($acl^{eq}(A) = A$). Sia $p \in S_\delta(A)$. Allora, in base all'Osservazione 2.3.14, per ogni modello M contenente A, p ha un'estensione ad un δ-tipo completo q su M. Se q_1, q_2 sono due tali estensioni, allora certamente $q_1 \restriction A = q_2 \restriction A$ e quindi, per il Corollario 2.3.16, $q_1 = q_2$. Cioè, se A è algebricamente chiuso e se M è un modello contenente A, allora ogni δ-tipo completo su A ha un'unica estensione ad un δ-tipo completo su M. Inoltre, queste estensioni sono "definite", a meno di equivalenza, da una stessa formula ψ_δ su A.

Definizione 2.3.17. Siano $A \subseteq B$ due insiemi algebricamente chiusi (nel senso di $\bar{M}^{eq}$). Siano $p \subseteq q$ due δ-tipi completi rispettivamente su A e B. Diciamo che q è un'estensione non-forking di p (equivalentemente q è non-forking su A)se q ha un'estensione $\bar{q}$ ad un modello M contenente B tale che la δ-definizione di $\bar{q}$ è su A.

Vediamo come sia possibile generalizzare questa definizione a δ-tipi completi su un arbitrario insieme A.

Osservazione 2.3.18. Siano $p \in S_\delta(A)$ e q un'estensione di p ad un δ-tipo completo su $acl^{eq}(A)$. Allora, se $p' \in S(A)$ è un tipo completo che contiene p, $p' \cup q$ è coerente. In caso contrario, per compattezza, esiste una formula $\sigma(x) \in q$ tale che $\sigma(x) \cup p'(x)$ è incoerente. Allora ogni A-coniugato di σ è incoerente con p'. Dato che q è un tipo completo su $acl^{eq}(A)$, σ ha un numero finito di A-coniugati. Sia $\psi(x)$ la disgiunzione di tali coniugati. Allora $\psi \cup p'$ è incoerente, ma $\psi(x)$ è una δ-formula su A implicata da σ e quindi $\psi \in p$. Contro il fatto che $p \subseteq q$.

Lemma 2.3.19. *Sia $\delta(x, y)$ una formula. Sia A un insieme e indichiamo con $B = acl^{eq}(A)$. Sia $p \in S_\delta(A)$ e sia $X = \{q(x) \in S_\delta(B) : q(x) \supseteq p(x)\}$. Sia $G = Aut_A(\bar{M})$. Allora:*

1. *G agisce transitivamente su X ;*
2. *esiste una relazione di equivalenza finita $E(x_1, x_2)$ tale che:*
    - *E è A-definibile;*
    - *ogni E-classe è definita da una δ-formula ;*

- *per ogni* $q_1, q_2 \in X$, $q_1 = q_2$ *se e solo se* $q_1(x_1) \cup q_2(x_2) \models E(x_1, x_2)$. *In particolare,* X *è finito.*

Dimostrazione. (1) Sia $p' \in S(A)$ tale che $p \subseteq p'$. Allora, dall'Osservazione 2.3.18, per ogni $q \in X$, $q \cup p'$ è coerente. In particolare, se $q_1, q_2 \in X$, allora esistono a e b in $\bar{M}$ tali che a realizza q_1, b realizza q_2 e $tp(a/A) = p' = tp(b/A)$. Per l'omogeneità di $\bar{M}$ esiste un A-automorfismo α tale che $\alpha(a) = b$. Quindi $\alpha(q_1) = q_2$.
(2) Sia $q \in X$ e sia ψ una δ-definizione per q. Allora ψ è su B e per ogni A-automorfismo α, $\alpha(\psi)$ è una δ-definizione per $\alpha(q)$. Sia $\Phi(x) = \{\alpha(\psi) : \alpha \in Aut_A(\bar{M})\}$. Dato che ψ è su B, Φ è finito e quindi X è finito. Allora

$$E(x_1, x_2) = \bigwedge \{\phi(x_1) \leftrightarrow \phi(x_1) : \phi \in \Phi\}$$

è la relazione di equivalenza cercata. □

Definizione 2.3.20. (Relazione di forking locale) Sia $\delta(x, y)$ una formula. Siano $A \subseteq B$ due insiemi. Siano $p \subseteq q$ due δ-tipi completi rispettivamente su A e B. Diciamo che q è un'estensione non-forking di p (equivalentemente q è non-forking su A) se esiste un'estensione di q ad un δ-tipo completo $q' \in S(acl^{eq}(B))$ tale che q' è non-forking su $acl^{eq}(A)$ (nel senso della Definizione 2.3.17).

Osservazione 2.3.21. Continuando con le notazioni della Definizione 2.3.20, se indichiamo con X l'insieme delle estensioni di q a δ-tipi completi su $acl^{eq}(B)$, allora $q' \restriction acl^{eq}(B) \in X$. Sia $q_1 \in X$ un'altra estensione di q. Allora, in base all'Osservazione 2.3.14, q_1 ha un'estensione q_1' su M che è definibile su $acl^{eq}(B)$. Tuttavia, per il Lemma 2.3.19 esiste una permutazione elementare α di $acl^{eq}(B)$ che fissa B puntualmente, tale che $\alpha(q' \restriction acl^{eq}(B)) = q_1$. Se indichiamo con ψ la δ-definizione di q' (che è su $acl^{eq}(A)$), allora $\alpha(\psi)$ è una δ-definizione per q_1'. Dato che $A \subseteq B$, α si restringe ad una permutazione elementare di $acl^{eq}(A)$. Quindi, $\alpha(\psi)$ è ancora una formula su $acl^{eq}(A)$ e q_1' è $acl^{eq}(A)$-definibile. Si è quindi mostrato che, con le notazioni della Definizione 2.3.20, sono equivalenti:

1. q è un'estensione non-forking di p ;

2. ogni estensione q_1 di q ad un δ-tipo completo su $acl^{eq}(B)$ è un'estensione non-forking di p.

Il seguente lemma permette di definire una "relazione di forking" tra formule e insiemi. Per la dimostrazione si può guardare il Lemma 2.16 in [4].

Definizione 2.3.22. Siano M una struttura ed $A \subseteq M$ un sottoinsieme. Una successione $(a_i : i < \omega)$ in M si dice A-indiscernibile se per ogni $n < \omega$ e per ogni $i_1 < \ldots < i_n$ e $j_1 < \ldots < j_n$ in ω risulta $tp((b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})/A) = tp((b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})/A)$.

Lemma 2.3.23. *Sia $\delta(x, a)$ un istanza di $\delta(x, y)$. Sia A un insieme. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Esiste un δ-tipo completo $p \in S_\delta(A \cup \{a\})$ tale che $\delta(x, a) \in p$ e p è non-forking su A.*

2. *Esiste una combinazione booleana positiva di A-coniugati di $\delta(x, a)$ che è A-definibile e coerente.*

3. *Ogni insieme di $acl^{eq}(A)$-coniugati di $\delta(x, a)$ è coerente.*

4. *Se $(a_i : i < \omega)$ è una successione A-indiscernibile tale che per ogni i, a_i realizza $tp(a/A)$, allora $\{\delta(x, a_i) : i < \omega\}$ è coerente.*

5. *Per ogni modello $M \supseteq A$, $\delta(x, a)$ è realizzata da un elemento di M.*

Definizione 2.3.24. Diciamo che una formula $\delta(x, a)$ è non-forking su A se $\delta(x, a)$ verifica una delle condizioni equivalenti del Lemma 2.3.23.

La teoria "locale" del forking descritta si applica senza problemi al caso in cui consideriamo Δ-tipi completi, per qualche insieme *finito* di formule $\Delta(x)$. Se p è un tipo completo su un insieme A, indichiamo con $p \restriction \delta$ l'insieme di δ-formule che sono in p. In particolare, $p \restriction \delta \in S_\delta(A)$. Sia p un Δ-tipo completo su A, indichiamo con $\bar{q}$ l'unione dei δ-tipi completi $q \in S_\delta(M)$ tali che q è un'estensione non-forking di $p \restriction \delta$ (al variare di $\delta \in \Delta$). Allora $\bar{q}$ è un Δ-tipo completo su M e risulta un'estensione non-forking di p (ogni δ-definizione di $\bar{q}$ è su $acl^{eq}(A)$).

Passiamo ora allo studio della relazione di forking "globale", cioè definiamo la relazione di forking per i tipi completi della teoria stabile T.

Definizione 2.3.25. (Forking) Siano $A \subseteq B$ due insiemi e siano p e q due tipi completi rispettivamente su A e B. Diciamo che q è un'estensione non-forking di p (equivalentemente q è non-forking su A) se per ogni $\delta(x, y)$, $q \restriction \delta(x, y)$ è non-forking su A (nel senso della Definizione 2.3.20).

Il seguente teorema raccoglie le principali proprietà della relazione di forking.

Teorema 2.3.26. *Siano $A \subseteq B$ due insiemi.*

1. *(Esistenza) Sia $p \in S(A)$ e sia M un modello contenente A. Allora esiste un'estensione non-forking di p su M. Inoltre, se A è algebricamente chiuso in M^{eq} ($A = acl^{eq}(A)$), tale estensione è unica.*

2. *(Carattere finito) Siano p e q tipi completi rispettivamente su A e B. Allora q è un'estensione non-forking di p se e solo se ogni formula $\phi \in q$ è non-forking su A.*

3. *(Transitività) Sia C un insieme tale che $A \subseteq B \subseteq C$. Siano $p \subseteq q \subseteq r$ tipi completi rispettivamente su A, B e C. Allora r è un'estensione non-forking di p se e solo se r è un'estensione non-forking di q e q è un'estensione non-forking di p.*

4. *(Simmetria) Sia a una n-upla in $\bar{M}$. Allora $tp(a/B)$ è non-forking su A se e solo se per ogni n-upla b in B, $tp(b/A \cup \{a\})$ è non-forking su A.*

5. *Sia $p \in S(A)$. Allora p ha al più $2^{|T|}$ estensioni non-forking su B. Inoltre:*
   - *$Aut_A(\bar{M})$ agisce transitivamente sull'insieme delle estensioni non-forking di p su B ;*
   - *se $q_1, q_2 \in \bar{M}$ sono due distinte estensioni non-forking di p su $\bar{M}$, allora esiste una relazione di equivalenza E finita ed A-definibile tale che risulta $q_1(x_1) \cup q_2(x_2) \models \neg E(x_1, x_2)$.*

6. *Siano p e q tipi completi rispettivamente su A e B. Supponiamo che q sia un tipo algebrico (ha un numero finito di realizzazioni). Allora se q è un'estensione non-forking di p, p è algebrico.*

Dimostrazione. (1) Osserviamo che, per definizione, ogni tipo $p \in S(acl^{eq}(A))$ è un'estensione non-forking di $p \restriction A$. Allora, è sufficiente mostrare che, se A è algebricamente chiuso, ogni $p \in S(A)$ ha un'unica estensione non-forking ad un modello M. Da Lemma 2.3.13 e dal Corollario 2.3.16, per ogni $\delta \in$ L, sia q_δ l'unica estensione non-forking di $p \restriction \delta$ su M. Allora

$$q = \bigcup \{q_\delta : \delta \in L\}$$

è l'estensione cercata.
(3) Segue direttamente dalla definizione di forking.
(2) Supponiamo che $q \subseteq p$ sia un'estensione non-forking e sia $\delta(x, a) \in p$. Per transitività, $p \restriction A \cup \{a\}$ è un'estensione non-forking di q che contiene $\delta(x, a)$. Dal punto (1) nel Lemma 2.3.23, $\delta(x, a)$ è non-forking su A.

Viceversa, possiamo assumere A algebricamente chiuso e $p \in S(\bar{M})$. Sia $p_0 = p \restriction A$ e sia p_1 l'unica estensione non-forking di p_0 su $\bar{M}$. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che $p_1 = p$. Sia $\phi(x) \in p$ e, per il punto (2) nel Lemma 2.3.23, sia $\chi(x)$ una combinazione booleana positiva di A-coniugati di ϕ, A-definibile e coerente. Allora risulta $\chi \in p_0$. Altrimenti la formula $\phi(x) \wedge \neg\chi(x)$ è in p e qualche insieme di suoi A-coniugati è incoerente, contro il punto (3) nel Lemma 2.3.23 (stiamo assumendo A algebricamente chiuso). Dal fatto che p_1 è l'unica estensione non-forking di p_0 e che A è algebricamente chiuso, segue che ogni A-automorfismo fissa p_1. Quindi $\phi(x) \in p_1$ e $p = p_1$.
(5) Segue facilmente dalla parte (1) del teorema e dal Lemma 2.3.19.
(4) Assumiamo A algebricamente chiuso. Sia b un n-upla in B. Si deve mostrare che $tp(b/A \cup \{a\})$ è un'estensione non-forking di $tp(b/A)$. Sia M un modello contenente $A \cup \{a\}$ e sia $q(y) \in S(M)$ un'estensione non-forking di $tp(b/A)$. Mostriamo che:

$$tp(b/A \cup \{a\}) = q \restriction A \cup \{a\} \ .$$

Siano x ed y variabili rispettivamente della stessa lunghezza di a e b. Sia $\epsilon(y,x)$ una formula e sia $\sigma_\epsilon(x)$ una ϵ-definizione per q (che è anche una ϵ-definizione per $tp(b/A)$). Indichiamo con $\delta(x,y)$ la simmetrica di $\epsilon(y,x)$ (δ e ϵ sono praticamente la stessa formula). Sia $\psi_\delta(y)$ una δ-definizione per $tp(a/A)$. Allora per il Lemma 2.3.15, risulta

$$\models \psi_\delta(b) \Leftrightarrow \models \sigma_\epsilon(a) \ .$$

Per ipotesi $tp(a/B)$ è un'estensione non-forking di $tp(a/A)$ e quindi ψ_δ è una δ-definizione per $tp(a/B)$. Allora:

$$\models \sigma_\epsilon(a) \Leftrightarrow \models \epsilon(b,a)$$

cioè, σ_ϵ è una ϵ-definizione per $tp(b/A \cup \{a\})$. Quindi, dato che che σ_ϵ è una ϵ-definizione per $q \restriction A \cup \{a\}$, i due tipi coincidono.

Il viceversa si ottiene in modo simile.
(6) Supponiamo B algebricamente chiuso e sia $p(x) \in S(B)$ un tipo algebrico. Allora esiste b in B tale che $p = tp(b/B)$ e, per (2), la formula $x = b$ non si divide su A. Per il Lemma 2.3.23, ogni insieme di $acl^{eq}(A)$-coniugati di $x = b$ è coerente, cioè b è in $acl^{eq}(A)$ e quindi $p \restriction A$ è algebrico. □

La relazione di forking permette di definire una relazione di indipendenza tra elementi e insiemi nel modello saturo $\bar{M}$.

Definizione 2.3.27. Diremo che una n-upla a è *indipendente* da un insieme B su C se $tp(a/B \cup C)$ è un'estensione non-forking di $tp(a/B)$. Un insieme A si dice indipendente da B su C se per ogni n-upla a in A, a è indipendente da B su C.

Osservazione 2.3.28. Dalle definizioni della relazione di forking, per ogni a e B in $\bar{M}^{eq}$, a è indipendente da $acl^{eq}(B)$ su B.

Definizione 2.3.29. Diciamo che una successione $(a_i : i < \omega)$ in un modello è A-indipendente se, per ogni $i < \omega$, a_i è indipendente da $\{a_j : i \neq j\}$ su A (nel senso della Definizione 2.3.27).

2.4 Teorie 1 based e insiemi Weakly Normal

In questo paragrafo vengono studiati i tipi stazionari e le relative basi canoniche. Quindi viene data la definizione di Teoria 1 based, con alcune condizioni equivalenti. Vengono inoltre definite le teorie Weakly Normal e inquadrate nell'ambito delle più generali teorie equazionali. Il risultato principale stabilisce che una teoria è Weakly Normal se e solo se è stabile e 1 based. L'impostazione scelta è principalmente quella di [4], con alcune influenze di [8] e [6].

Fissiamo una teoria stabile T ed indichiamo con $\bar{M}$ il suo monster model. Un tipo completo $p \in S(A)$ si dice *stazionario* se per ogni $B \supseteq A$, p ha un'unica estensione non forking ad un tipo completo su B.

Osservazione 2.4.1. Sia $p \in S(A)$. Dal punto (1) nel Teorema 2.3.26 segue che, p è stazionario se e solo se p ha un'unica estensione non-forking su $acl^{eq}(A)$.

Sia $p \in S(A)$ stazionario e sia $\bar{p}$ la sua estensione non-forking sul modello $\bar{M}$. Allora per ogni $\delta(x, y)$, $\bar{p}$ ha una δ-definizione ψ_δ che è su $acl^{eq}(A)$. Indichiamo con c_δ un codice per ψ_δ (unico a meno di interdefinibilità).

Definizione 2.4.2. Si dice *base canonica* di p l'insieme:

$$Cb(p) = dcl^{eq}(\{c_\delta : \delta \in L\}) .$$

Lemma 2.4.3. *Sia $p \in S(A)$ un tipo stazionario. Allora:*

1. *Per ogni $\alpha \in Aut(\bar{M})$, $\alpha(p) = p$ se e solo se α fissa $Cb(p)$ puntualmente.*
2. *$Cb(p) \subseteq dcl^{eq}(A)$.*
3. *Per ogni $B \subseteq A$, p è un'estensione non-forking di $p \upharpoonright B$ se e solo se $Cb(p) \subseteq acl^{eq}(B)$.*
4. *Per ogni $B \subseteq A$, p è un'estensione non-forking di $p \upharpoonright B$ e $p \upharpoonright B$ è stazionario se e solo se $Cb(p) \subseteq dcl^{eq}(B)$.*

Dimostrazione. (1) Per ogni formula $\delta(x, y)$, se ψ_δ è una δ-definizione per p, allora $\alpha(\psi_\delta)$ è una δ-definizione per $\alpha(p)$. Allora, $\alpha(p) = p$ se e solo se $\alpha(\psi_\delta)$ equivale a ψ_δ se e solo se $\alpha(c_\delta) = c_\delta$.
(2) Segue da (1) e dall'osservazione che ogni A-automorfismo chiaramente fissa p.
(3) Chiaro.
(4) Segue da (1) e dall'osservazione che $Aut_B(\bar{M})$ agisce sulle estensioni non-forking di $p \restriction B$ ad A. □

Lemma 2.4.4. *Sia $p \in S(\bar{M})$ un tipo stazionario e sia $A \subseteq \bar{M}$ tale che $dcl^{eq}(A) = A$. Allora p è definibile su A se e solo se $Cb(p) \subseteq A$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalle definizioni. □

Se $p \in S(A)$ è un tipo stazionario, allora per ogni $B \supseteq A$, indichiamo con $p \mid B$ l'unica estensione non-forking di p su B.

Definizione 2.4.5. Sia $p(x) \in S(A)$ stazionario. Una successione $(a_i : i < \omega)$ si dice successione di Morley per p se, per ogni $i < \omega$, a_{i+1} realizza $p \mid (A \cup \{a_0, \dots, a_i\})$.

Lemma 2.4.6. *Sia $p \in S(A)$ stazionario. Sia $(a_i : i < \omega)$ una successione di Morley per p. Allora:*

$$Cb(p) \subseteq dcl^{eq}(\{a_i : i < \omega\}) \ .$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 2.3.6 . □

Definiamo ora i tipi forti di T identificandoli con particolari tipi immaginari. Questa identificazione ci permetterà di concludere che ogni tipo forte è stazionario. Sia $A \subseteq \bar{M}$. Denotiamo con $FE(A)$ l'insieme delle relazioni di equivalenza finite A-definibili.

Definizione 2.4.7. Siano b una n-upla di elementi in $\bar{M}$ e $A \subseteq \bar{M}$. Definiamo il tipo forte di b su A come l'insieme

$$stp(b/A) = \{\phi(x, b) : \phi \in FE(A)\} \ .$$

Osserviamo che $stp(b/A)$ è un tipo su $A \cup \{b\}$. Due n-uple a, b hanno lo stesso tipo forte su A se, per ogni relazione di equivalenza finita ϕ su A, risulta $\phi(a, b)$. In tal caso scriviamo $stp(a/A) = stp(b/A)$. Ribadiamo che ciò non vuol dire che i due tipi contengono le stesse formule (in quanto hanno parametri diversi), ma significa che, per ogni c in $\bar{M}$, c realizza $stp(a/A)$ se e solo se c realizza $stp(b/A)$.

Osservazione 2.4.8. Osserviamo che $stp(a/A) = stp(b/A)$ implica $tp(a/A) = tp(b/A)$, cioè se b realizza $stp(a/A)$, allora b realizza $tp(a/A)$. Infatti, se ϕ è una formula su A vera per a e se consideriamo la relazione di equivalenza finita

$$E(x_1, x_2) = (\phi(x_1) \wedge \phi(x_2)) \vee (\neg\phi(x_1) \wedge \neg\phi(x_2))$$

allora per ipotesi $E(a, b)$ e quindi $\models \phi(b)$.

Inoltre, se M è un modello contenente A, allora $tp(b/M) \models stp(b/A)$. Infatti, sia $E(x, y) \in FE(A)$ tale che $E(x, b) \in stp(b/A)$. Dato che M è un modello $E(x, y)$ ristretto a M^n ha lo stesso numero di classi di $E(x, y)$ in $\bar{M}^n$. Quindi esiste $m \in M$ tale che $\models E(b, m)$ (cioè la classe di b ha un rappresentante in M). Allora $E(x, m) \in tp(b/M)$ e risulta:

$$\models E(x, m) \rightarrow E(x, b) \ .$$

Quindi $tp(b/M) \models stp(b/A)$.

La dimostrazione del seguente lemma segue facilmente dal Lemma 2.2.12.

Lemma 2.4.9. *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. $stp(a/A) = stp(b/A)$ *;*
2. a, b *appartengono agli stessi insiemi quasi-definibili su* A *;*
3. $tp(a/acl^{eq}(A)) = tp(b/acl^{eq}(A))$.

Alla luce di questo lemma identificheremo i tipi forti $stp(a/A)$ con i tipi immaginari $tp(a/acl^{eq}(A))$.

Osservazione 2.4.10. (i) Ogni tipo forte è stazionario.
(ii) Se M è un modello contenente A, allora $tp(a/M) \models stp(a/A)$ (Osservazione 2.4.8). Quindi $tp(a/M) \models tp(a/acl^{eq}(A))$.

Ogni tipo forte ha una base canonica che, per definizione, è la base canonica della sua estensione non-forking globale. Inoltre per il Lemma 2.4.6 essa è contenuta nell'insieme degli immaginari che sono definibili su una successione di Morley del tipo. In alcuni casi tuttavia è sufficiente il primo elemento di una successione di Morley a "determinare" la base canonica.

Definizione 2.4.11. Diciamo che la teoria stabile T è una teoria **1 based** se, per ogni a e B in $\bar{M}^{eq}$, risulta:

$$Cb(stp(a/B)) \subseteq acl^{eq}(a) \ .$$

Equivalentemente, T è 1 based se, per ogni a,B tali che $tp(a/B)$ è stazionario risulta $Cb(tp(a/B)) \subseteq acl^{eq}(a)$. Diciamo che un'insieme $\emptyset$-definibile $X \subseteq \bar{M}^{eq}$ è 1 based se, per ogni a in X e per ogni $B \subseteq \bar{M}^{eq}$ tale che $tp(a/B)$ è stazionario, risulta $Cb(tp(a/B)) \subseteq acl^{eq}(a)$.

Osservazione 2.4.12. La proprietà di essere 1 based per una teoria è invariante per aggiunzione di un insieme "piccolo" di costanti nel linguaggio. Più precisamente se $A \subseteq \bar{M}$ allora T è 1 based se e solo se $Th((\bar{M}, a)_{a \in A})$ è 1 based (Lemma 3.31 in [13]).

Introduciamo ora la nozione di insieme Weakly Normal. Se $X \subseteq \bar{M}$ è un insieme definibile, chiamiamo *coniugato* di X l'insieme $\alpha(X)$, dove $\alpha \in Aut(\bar{M})$.

Definizione 2.4.13. Un insieme definibile $X \subseteq \bar{M}$ si dice Weakly Normal se per ogni successione $(X_i : i < \omega)$ di coniugati di X a due a due distinti, risulta:

$$\bigcap_{i<\omega} X_i = \emptyset \ .$$

Osservazione 2.4.14. Sia X un insieme definibile e sia c un codice per X. Allora X è Weakly Normal se e solo se per ogni $a \in X$, $c \in acl^{eq}(a)$.

Osservazione 2.4.15. Diciamo che una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ ha la DIC (discendent intersection condition) se, per ogni successione $(X_i : i \in I)$ di insiemi in $\mathcal{F}$, esiste un sottoinsieme finito $J \subseteq I$ tale che risulta:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j \ .$$

Sia $X \subseteq \bar{M}$ un'insieme definibile. Diciamo che X è *Srour chiuso* se la famiglia dei coniugati di X sotto l'azione di $Aut(\bar{M})$ ha la DIC. Ogni insieme Weakly Normal è Srour chiuso.

Sia $\phi(x, y)$ una L-formula. Diciamo che un insieme X è ϕ-definibile se esiste un'istanza $\phi(x, a)$ di ϕ che definisce X.

Definizione 2.4.16. Una formula $\phi(x, y)$ si dice Weakly Normal in x se, per ogni successione $(X_i : i < \omega)$ di insiemi ϕ-definibili a due a due distinti, risulta:

$$\bigcap_{i<\omega} X_i = \emptyset \ .$$

Lemma 2.4.17. *Sia X un insieme definibile. Allora X è Weakly Normal se e solo se X è ϕ-definibile da qualche formula Weakly Normal $\phi(x, y)$.*

Dimostrazione. In generale, se $\psi(x, a)$ è una formula, indichiamo con $\psi(\bar{M}, a)$ l'insieme definito in $\bar{M}$ da ψ.

Chiaramente ogni insieme definito da un'istanza di una formula Weakly Normal è un insieme Weakly Normal.

Viceversa, sia $X = \phi(M, b)$ weakly normal. Dunque per ogni successione infinita $(b_i : i < \omega)$ di coniugati di b, se gli insiemi $\phi(M, b_i)$ sono a due a due distinti, l'intersezione $\bigcap_i \phi(M, b_i)$ è vuota. Per saturazione/compattezza esiste un $n \in \omega$ tale che la stessa cosa vale per ogni n-upla $(b_i : i < n)$ di coniugati di b (verificare!). Sempre per compattezza, esiste un insieme finito $\Delta(y)$ di formule, tale che per ogni n-upla di elementi $(b_i : i < n)$, se ciascun b_i ha lo stesso Δ-tipo di b e gli insiemi $\phi(M, b_i)$ sono distinti, allora $\phi(M, b_1) \cap ... \cap \phi(M, b_n) = \emptyset$. Sia ora $\theta(x, y)$ la congiunzione di $\phi(x, y)$ e di tutte le formule $\delta(y) \in \Delta(y)$ che sono verificate da b. Chiaramente $\theta(x, b)$ equivale a $\phi(x, b)$ e quindi definisce X. Verifichiamo che $\theta(x, y)$ è weakly normal. Dati $a_1, ..., a_n$ tali che gli insiemi $\theta(M, a_i)$ sono distinti, occorre verificare che l'intersezione $\bigcap_{i \leq n} \theta(M, a_i)$ è vuota. Questo è immediato, in quanto $\theta(M, a_i)$ implica che a_i ha lo stesso Δ-tipo di b. $\square$

Definizione 2.4.18. Diciamo che una teoria T è Weakly Normal se ogni insieme definibile in $\bar{M}$ è combinazione booleana finita di insiemi definibili Weakly Normal.

Osservazione 2.4.19. Una L-formula $\phi(x, y)$ si dice un'*equazione* per T se la famiglia degli insiemi ϕ-definibili in $\bar{M}$ ha la DIC (vedi Osservazione 2.4.15). Come nel Lemma 2.4.17 si dimostra che un insieme è Srour chiuso se e solo se è ϕ-definibile da un'equazione ϕ. Una teoria si dice equazionale se ogni insieme definibile in $\bar{M}$ è combinazione booleana finita di insiemi Srour chiusi. Allora vale:

- ogni formula Weakly Normal è un'equazione ;
- ogni teoria Weakly Normal è equazionale.

Per ulteriori approfondimenti sulle teorie equazionali si possono consultare [8] e [10].

L'eliminazione dei quantificatori tramite formule Weakly Normal per una teoria T è collegata alla stabilità e alla proprietà 1 based di T. I risultati che seguono illustrano la natura di questo collegamento che, in effetti, esprime una condizione equivalente.

Lemma 2.4.20. *Ogni teoria Weakly Normal è stabile.*

Dimostrazione. Sia M un modello. Per il Lemma 2.4.17, ogni tipo $p(x) \in S(M)$ è determinato dall'insieme dei $\phi(x, y)$-tipi che sono in p, per ogni formula $\phi(x, y)$ Weakly Normal. Dato che, per definizione, ogni insieme infinito di istanze di ϕ è incoerente, solo un numero finito di istanze di ϕ è in p. Allora, se indichiamo con ψ_p la congiunzione delle istanze di ϕ che sono in p, ogni tipo p è determinato dall'insieme di tali ψ_p. Dato che ci sono al più $|L|+|M|$ possibili scelte per le ψ_p, se $|M|$ soddisfa $|M|^{|T|} = |M|$, allora $|S(M)| \leq |M|$. Quindi per il Corollario 2.3.9 si conclude. □

Osservazione 2.4.21. Come nel Lemma 2.4.20 si può dimostrare che ogni teoria equazionale è stabile.

Osservazione 2.4.22. Supponiamo che ogni insieme definibile in $\bar{M}^{eq}$ sia combinazione booleana finita di insiemi Weakly Normal. Sia $M \preceq \bar{M}$ un modello ω-saturo. Allora ogni insieme M-definibile è combinazione booleana finita di insiemi Weakly Normal M-definibili. Infatti, se X è M-definibile, allora esiste un sottoinsieme finito $A \subseteq M$ tale che X è A-definibile. Indichiamo con $b_1, \ldots, b_n$ i parametri di ogni formula Weakly Normal che occorre nella formazione di X. Consideriamo $p = tp(b_1, \ldots, b_n/A)$. Dalla saturazione di M, p è realizzato in M diciamo da $a_1, \ldots, a_n$. Sia α un A-automorfismo che manda b_i in a_i. Dato che X è A-definibile, risulta $\alpha(X) = X$. Allora gli insiemi $\alpha(X_i)$, al variare di X_i tra i Weakly Normal che definiscono X, sono su M e chiaramente definiscono X.

Osservazione 2.4.23. Siano a ed A in $\bar{M}$ tali che $p = tp(a/A)$ è stazionario. Allora esiste un modello $M \supseteq A$ tale che a è indipendente da M su A (cioè, $tp(a/M) = p \mid M$). Infatti, sia M' un generico modello contenente A e sia a' in $\bar{M}$ una realizzazione di $p \mid M'$. Allora esiste un A-automorfismo α di $\bar{M}$ tale che $\alpha(a') = a$. Poniamo $M = \alpha(M')$. Allora $M \supseteq A$ e $tp(a/M) = p \mid M$.

Definizione 2.4.24. Relativizzando la nozione in 2.4.11, diciamo che la teoria T è 1 based per la sorte S di $\bar{M}^{eq}$ se per ogni a in S e per ogni $A \subseteq \bar{M}^{eq}$ tale che $tp(a/A)$ è stazionario, risulta:

$$Cb(tp(a/A)) \subseteq acl^{eq}(a).$$

Quindi, confrontando con la definizione 2.4.11, la teoria T è 1 based se e solo se T è 1 based per ogni sorte S di $\bar{M}^{eq}$.

Teorema 2.4.25. *Sia T una teoria stabile e sia S una sorte di $\bar{M}^{eq}$. Sono equivalenti:*

1. *T è 1 based per la sorte S;*

2. *ogni insieme definibile nella sorte S è combinazione booleana finita di insiemi Weakly Normal definibili in S.*

Dimostrazione. ($2 \to 1$) Sia a in S. Dall'Osservazione 2.4.23, è sufficiente provare che se M è un modello, allora $Cb(tp(a/M)) \subseteq acl^{eq}(A)$. Sia M un modello sufficientemente saturo. Sia $p = tp(a/M)$ ed indichiamo con

$$C = acl^{eq}(a) \cap M^{eq} \ .$$

Sia X un insieme Weakly Normal ed M-definibile in p. Sia c un codice per X. Dall'Osservazione 2.4.14, $c \in acl^{eq}(a)$. Daltronde $c \in M^{eq}$. Si è quindi provato il seguente fatto:

claim: ogni insieme Weakly Normal ed M-definibile X in p è C-definibile.

Ora, sia α un C-automorfismo di M e sia $q = \alpha(p)$. Dato che α fissa C puntualmente, per il claim, q e p contengono gli stessi insiemi Weakly Normal. Per l'Osservazione 2.4.22, questo implica $p = q$. Quindi $Cb(p) \subseteq C$, cioè $Cb(p) \subseteq acl^{eq}(a)$.
($1 \to 2$) Diamo solo un'idea della dimostrazione rimandando a [4] per i dettagli. Per un'altra dimostrazione (sostanzialmente uguale) si può guardare la Proposizione 1.1 in [6].

Assumiamo (1), indichiamo con R_δ il rango di Cantor-Bendixon definito nel Paragrafo 2.3 (vedi Lemma 2.3.12). Ricordiamo che se p è un tipo completo, allora $mult_\delta(p)$ è uguale al numero di estensioni non-forking di $p \restriction \delta$ su un modello. Per prima cosa si prova che, se $p \in S(A)$ è un tipo stazionario allora, per ogni formula $\delta(x, y)$, esiste una formula Weakly Normal $\psi_\delta(x, c) \in p \restriction \delta$ tale che $R_\delta(p \restriction \delta) = R_\delta(\psi_\delta(x, c))$ e $mult_\delta(\psi_\delta(x, c))) = 1$. Da questo si fa vedere che, se p, q sono tipi completi su un modello saturo M che contengono le stesse formule Weakly Normal, allora $p = q$. In altre parole, ogni tipo completo p su M è determinato dall'insieme p_{WN} di formule Weakly normal che sono in p. Da questo, se X è un insieme M definibile allora, posto Γ_X l'insieme dei p_{WN} coerenti con X, risulta $\Gamma_X \models X$ e quindi, per compattezza, X è combinazione booleanna di insiemi Weakly Normal. $\square$

Per come è enunciato, il Teorema 2.4.25, in pratica, è un pò difficile da applicare. In alcuni casi, come per esempio con i moduli, si riesce ad ottenere un'eliminazione dei quantificatori tramite formule Weakly Normal per gli insiemi definibili nel modello $\bar{M}$ della teoria T. Da questo, per il Lemma 2.4.20, si deduce in primo luogo che T è stabile. Il problema è che, in questo caso, il Teorema 2.4.25 ci dice solamente che T è 1 based relativamente alla sorte $S_=$. Il seguente lemma mostra come in realtà quest'ultima condizione sia sufficiente a dedurre che T è 1 based.

Lemma 2.4.26. *Supponiamo che la teoria T sia 1 based relativamente alla sorte $S_=$ di $\bar{M}^{eq}$. Allora T è 1 based (cioè, T è 1 based per ogni sorte).*

Dimostrazione. Sia b l'immaginario corrispondente ad una classe di una relazione di equivalenza $\emptyset$-definibile E. Allora è sufficiente mostrare che, per ogni modello M contenente b, $Cb(stp(b/A)) \subseteq M^{eq}$. Sia quindi M tale che $[b] \cap M \neq \emptyset$ e sia a in M tale che $a/E = b$. Allora risulta:

$$Cb(stp(b/A)) \subseteq Cb(stp(a/A)) \subseteq acl^{eq}(a) \subseteq M^{eq} .$$

□

Corollario 2.4.27. *Se la teoria T è Weakly Normal, allora T è stabile e 1 based.*

Dimostrazione. Se T è Weakly Normal, dal Lemma 2.4.20, T è stabile. Per il Teorema 2.4.25, T è 1 based per la sorte $S_=$ di $\bar{M}^{eq}$. Quindi, per il Lemma 2.4.26, T è 1 based. □

Il seguente teorema riassume i discorsi fatti in precedenza.

Teorema 2.4.28. *Sia T una teoria. Sono equivalenti:*

1. *T è Weakly Normal ;*
2. *T è stabile e 1 based.*

Dimostrazione. Se T è Weakly Normal allora per il Corollario 2.4.27, T è stabile e 1 based. Viceversa, se vale quest'ultima condizione allora in particolare T è una teoria stabile che è 1 based per la sorte $S_=$. Per il Teorema 2.4.25, T è Weakly Normal. □

Il seguente corollario mostra come se una teoria è Weakly Normal, allora gli insiemi definibili in $\bar{M}^{eq}$ preservano la "forma" degli insiemi definibili in $\bar{M}$.

Corollario 2.4.29. *Sia T una teoria. Se T è Weakly Normal, allora T^{eq} è Weakly Normal.*

Dimostrazione. Se T è Weakly Normal, per il Teorema 2.4.25, T è 1 based relativamente alla sorte $S_=$ di $\bar{M}^{eq}$. Per il Lemma 2.4.26, T è 1 based. Ancora per il Teorema 2.4.25, ogni insieme definibile in $\bar{M}^{eq}$ è combinazione booleana finita di insiemi Weakly Normal. □

2.5 Moduli

In questo paragrafo vengono studiati i moduli. Si dimostra l'eliminazione dei quantificatori tramite p.p. formule e se ne deduce che ogni teoria completa di moduli è Weakly Normal. I principali riferimenti per questo paragrafo sono [1] e [2].

Sia R un anello. Ricordiamo dal capitolo 1 che ogni R-modulo M (destro o sinistro) può essere visto come una struttura nel linguaggio L contenente il linguaggio della teoria dei gruppi e un simbolo di funzione per ogni scalare $r \in R$ che viene interpretato in M come l'omotetia di rapporto r (destra o sinistra a seconda dei casi).

Per tutto il resto del paragrafo L denoterà il linguaggio degli R-moduli per un fissato anello R. Diciamo che una L-formula è p.p. (positiva primitiva) se è della forma

$$\exists \bar{y}\ A \cdot \bar{y} + B \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

dove A e B sono matrici a coefficienti in R.

Sia M un R-modulo e $\phi(x, y)$ una p.p. formula, dove indichiamo con x, y rispettivamente n-uple e m-uple di variabili. Indichiamo con $\phi(M, a)$ l'insieme definito da $\phi(x, a)$ in M^n per qualche m-upla di parametri a.

Lemma 2.5.1. *Siano M un R-modulo e $\phi(x, y)$ una p.p. formula. Allora:*

1. *L'insieme $\phi(M, 0)$ è un sottogruppo di M^n.*
2. *Per ogni a in M, $\phi(M, a)$ è vuoto oppure definisce una classe laterale del sottogruppo $\phi(M, 0)$ in M.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalle definizioni. □

L'insieme delle p.p. formule "elimina i quantificatori" per ogni teoria completa di R-moduli. Più in generale, ogni formula è equivalente modulo *ogni* teoria di R-moduli ad una combinazione booleana di p.p. formule e di particolari enunciati (detti sentenze invarianti). Discutiamo brevemente questi risultati, rimandando a [1] per ulteriori dettagli.

Iniziamo enunciando un risultato valido in generale per i gruppi la cui dimostrazione si può trovare nel Lemma 4.2.1 in [1].

Teorema 2.5.2. *(Neumann) Sia G un gruppo. Siano $H, H_1, \ldots, H_n$ sottogruppi di G tali che, per qualche $a, a_1, \ldots, a_n$ in G risulti:*

$$Ha \subseteq \bigcup_{i \leq n} H_i a_i \ .$$

Allora esiste un sottoinsieme di indici $J \subseteq n$ tale che:

- *per ogni* $j \in J$, $[H : H \cap H_j] \leq n!$ *;*
- $Ha \subseteq \bigcup_{j \in J} H_j a_j$.

In generale, una L-teoria T gode della proprietà di eliminazione dei quantificatori se ogni L-formula ϕ è equivalente modulo T (cioè, in ogni modello di T) ad una combinazione booleana finita di formule senza quantificatori. Diciamo che un'insieme di formule K elimina i quantificatori per T se ogni L-formula è equivalente modulo T ad una combinazione booleana finita di formule in K. Se K è un insieme di formule e si vuole dimostrare che K elimina i quantificatori per T, ragionando per induzione, è sufficiente mostrare come si riesce ad eliminare un quantificatore esistenziale da una formula della forma

$$\exists y \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

dove ϕ è una combinazione booleana di formule in K. Per maggiori dettagli si può guardare il Lemma 2.3.1 [2].

Siano M un R-modulo e ϕ, ψ p.p. formule. Poniamo:

$$Inv(M, \phi, \psi) = |\phi(M)/\phi(M) \cap \psi(M)| \ .$$

Osserviamo che se $k < \omega$, allora l'affermazione $Inv(M, \phi, \psi) > k$ equivale a $M \models \forall y_0, \ldots, y_k \exists x(\phi(x) \wedge \bigwedge_{i \leq k} \neg\psi(x - y_i))$ e quindi $Inv(M, \phi, \psi) = k$ è equivalente a $Inv(M, \phi, \psi) > k \wedge \neg Inv(M, \phi, \psi) > k+1$. Ne segue che se T è una teoria completa di R-moduli, si può definire $Inv(T, \phi, \psi) = Inv(M, \phi, \psi)$, dove M è un qualsiasi modello di T.

Sia T una teoria completa di R-moduli, si chiama *sentenza invariante* di T una sentenza della forma $Inv(T, \phi, \psi) = k$, per un cardinale finito k.

Teorema 2.5.3. *Sia $\phi(\bar{x}, y)$ una combinazione booleana di p.p. formule. Allora esiste una formula $\psi(\bar{x})$, combinazione booleana di p.p. formule e sentenze invarianti, tale che, per ogni R-modulo M risulta:*

$$M \models \forall \bar{x}(\exists y \phi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Dimostrazione. Sia M un R-modulo. Sia $\bar{d}$ in M. Mostriamo che la formula $\exists y \phi(\bar{d}, y)$ è equivalente in M ad una combinazione booleana di sentenze invarianti e p.p. formule $\theta(\bar{d})$. Scriviamo $\exists y \phi(\bar{x}, y)$ come

$$\exists y(\ \psi_1(\bar{x}, y)) \wedge \ldots \wedge \psi_n(\bar{x}, y) \wedge \neg\chi_1(\bar{x}, y)) \wedge \ldots \wedge \neg\chi_m(\bar{x}, y) \ ) \tag{2.4}$$

dove ψ_i, χ_j sono p.p. formule. Osserviamo che la prima congiunzione di p.p. formule in (2.4) è equivalente ad una singola p.p. formula ψ. Inoltre, rimpiazzando ogni χ_i con $\chi_i \wedge \psi$, possiamo assumere che ogni χ_i implichi ψ. Quindi (2.4) è equivalente a:

$$\exists y(\ \psi(\bar{x}, y)) \wedge \neg\chi_1(\bar{x}, y)) \wedge \ldots \wedge \neg\chi_m(\bar{x}, y) \ ) \tag{2.5}$$

dove ψ, χ_i sono p.p. formule e ogni χ_i implica ψ.

Siano $G = \psi(0, \ldots, 0, M)$ e $H_i = \chi_i(0, \ldots, 0, M)$. Allora G, H_i sono sottogruppi e, dalle nostre assunzioni, per ogni i, $H_i \leq G$. Da (2.5), per ogni $\bar{d}$ in M abbiamo

$$M \models \neg(\exists y \phi(\bar{d}, y)) \quad sse \quad \psi(\bar{d}, M) \subseteq \bigcup_i \chi_i(\bar{d}, M). \tag{2.6}$$

Per il Lemma 2.5.1, le formule in (2.6) definiscono l'insieme vuoto o classi laterali dei sottogruppi G, H_i. Senza perdere di generalità, assumiamo che nessuna formula in (2.6) definisca il vuoto e siano c, b'_i tali che $\psi(\bar{d}, M) = G+c$ e $\chi_i(\bar{d}, M) = H_i + b'_i$. Allora la parte destra di (2.6) può essere scritta come

$$G + c \subseteq \bigcup_i H_i + b'_i \ .$$

Quindi ponendo $b_i = b'_i - c$ otteniamo:

$$M \models \neg(\exists y \phi(\bar{d}, y)) \quad sse \quad G \subseteq \bigcup_i H_i + b_i. \tag{2.7}$$

Per il Teorema 2.5.2, se vale la parte destra in (2.7), allora deve continuare a valere una volta soppressi tutti i sottogruppi H_i di indice infinito in G. Quindi possiamo assumere che ogni H_i abbia indice finito in G. Sia $H = \bigcap_i H_i$. Se X è unione di classi laterali di H, scriviamo $N(X)$ per il numero di classi laterali di H contenute in X. Allora:

$$\begin{aligned} G \subseteq \bigcup_i H_i + b_i \quad &\Leftrightarrow \quad N(G) \leq N(\bigcup_i H_i + b_i) \\ \Leftrightarrow \quad N(G) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} &(-1)^{k-1} \{ \sum_{J \subseteq n, \ |J|=k} N(\bigcap_{i \in J} H_i + b_i)\}. \end{aligned}$$

Ora, $\bigcap_{i \in J} H_i + b_i$ è vuota oppure è unione di classi laterali di H e in tal caso $N(\bigcap_{i \in J} H_i + b_i) = (\bigcap_{i \in J} H_i + b_i : H)$. Quindi possiamo ridurre la parte destra di (2.7) ad una combinazione booleana di affermazioni del tipo:

$$(\bigcap_{i \in J} H_i + b_i : H) \leq n \quad e \quad \bigcap_{i \in J} H_i + b_i \neq \emptyset \ . \tag{2.8}$$

Le prime sono traducibili come sentenze invarianti, le seconde equivalgono a $\bigcap_{i \in J} H_i + b'_i \neq \emptyset$ e cioè a $\exists y \bigwedge_{i \in J} \chi_i(\bar{d}, y)$ (p.p. formula). $\square$

Corollario 2.5.4. *(Bauer-Monk quantifier elimination theorem) Sia R un anello e sia L il linguaggio degli R-moduli sinistri (destri). Allora per ogni L-formula ϕ esiste una L-formula ψ tale che:*

1. *ψ è combinazione booleana di p.p. formule e sentenze invarianti ;*

2. *ϕ equivale a ψ in ogni R-modulo sinistro (destro).*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 2.5.3 procedendo per induzione sulla complessità della formula. □

Teorema 2.5.5. *Sia H un R-modulo sinistro (destro) e sia $T = Th(H)$. Ogni L-formula è equivalente modulo T ad una combinazione booleana finita di p.p. formule.*

Dimostrazione. Segue dal Corollario 2.5.4. □

Corollario 2.5.6. *Sia H un R-modulo. Allora $Th(H)$ è una teoria stabile e 1 based.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2.4.25 è sufficiente osservare che ogni p.p. formula è Weakly Normal (in quanto due classi laterali di un sottogruppo sono uguali o disgiunte). □

2.6 Insiemi strongly-minimal e geometria

In questo paragrafo si analizza il caso delle teorie totalmente trascendenti. Si mostra come la relazione di forking può essere descritta in termini di rango di Morley e si analizzano alcune proprietà della dipendenza algebrica in un insieme Strongly Minimal. In particolare, si dimostra com'è possibile definire una pre-geometria su un insieme Strongly Minimal e si collega la proprietà 1 based con la modularità di tale pre-geometria. L'impostazione di questo paragrafo è presa da [13] e [4].

Sia T una teoria completa e sia M un modello di T. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri a in M. Definiamo per induzione il rango di Morley di $\phi(x, a)$ come segue:

- $RM(\phi(x, a)) \geq 0$ se $M \models \exists x \phi(x, a)$;

- $RM(\phi(x, a)) \geq \alpha + 1$ se esiste un'estensione elementare $N \succeq M$, una successione $(b_i : i < \omega)$ in N e una successione di formule $(\psi_i(x, b_i) : i < \omega)$ tali che:

  1. per ogni i, $N \models \psi_i(x, b_i) \to \phi(x, a)$;

2. per ogni i, $RM(\psi_i(x, b_i)) \geq \alpha$;
3. per ogni $i \neq j$, $N \models \neg(\exists x(\psi_i(x, b_i) \wedge \psi_j(x, b_j)))$.

- $RM(\phi(x, a)) \geq \lambda$ se per ogni $\alpha < \lambda$, $RM(\phi(x, a)) \geq \alpha$ (per λ limite).

Se la costruzione si ferma, diciamo che il rango di Morley di $\phi(x, a)$ è definito e scriviamo $RM(\phi(x, a)) < \infty$. Altrimenti scriviamo $RM(\phi(x, a)) = \infty$. Se il rango di Morley di $\phi(x, a)$ è definito e uguale ad α, allora esiste un intero $n + 1 < \omega$ tale che non esistono successioni di elementi (in un'estensione elementare) e formule di lunghezza $n + 1$, che verificano le condizioni (1),(2) e (3). L'intero n si chiama grado di Morley di $\phi(x, a)$ e si scrive $dM(\phi(x, a)) = n$. Se $A \subseteq M$ e se $p \in S(A)$, poniamo $RM(p) = min\{RM(\phi) : \phi \in p\}$. Se risulta $RM(p) = \alpha < \infty$ e se $\phi \in p$ è tale che $RM(\phi) = \alpha$, allora si pone per definizione $dM(p) = dM(\phi)$.

Osservazione 2.6.1. Il rango di Morley è l'analogo "globale" del rango di Cantor-Bendixon definito nel Paragrafo 2.3, se si considera l'insieme di formule Δ =L.

Definizione 2.6.2. Una L-teoria T si dice totalmente trascendente (t.t.) se per ogni L-formula $\phi(x)$ risulta $RM(\phi(x)) < \infty$.

Le teorie t.t. costituiscono una sottoclasse delle teorie stabili come precisato dal seguente lemma.

Lemma 2.6.3. *Ogni teoria t.t. è stabile.*

Dimostrazione. Sia T una teoria totalmente trascendente. Siano M un modello di T e $p \in S(M)$ un tipo completo tale che $(RM, dM)(p) = (\alpha, d)$. Indichiamo con ϕ_p una formula in p di rango α e grado d. Allora, per ogni $\psi \in L_M$ risulta:

$$\psi \in p \Leftrightarrow RM(\psi \wedge \phi_p) = \alpha \ e \ dM(\psi \wedge \phi_p) = d \ .$$

Quindi, ogni tipo p è determinato dalla formula ϕ_p. Cioè, $\phi_p \equiv \phi_q$ implica $p = q$. Dato che ci sono al più $|M| + |T|$ possibili scelte per ϕ_p, risulta $|S(M)| < |M| + |T|$. Per il Corollario 2.3.9 si conclude. $\square$

Osservazione 2.6.4. La dimostrazione del Lemma 2.6.3 fornisce in realtà un limite più forte del Corollario 2.3.9, sulla cardinalità dei tipi di una teoria totalmente trascendente. Cioè, se $|M| = \lambda \geq |T|$, allora $|S(M)| \leq \lambda$. In generale, le teorie che soddisfano questo limite sui tipi, per modelli di cardinalità λ, si chiamano teorie λ-stabili. Quindi una teoria t.t. è λ-stabile per ogni $\lambda \geq |T|$.

Una teoria contabile e totalmente trascendente si chiama teoria ω-stabile in quanto si dimostra che, una teoria contabile T è ω-stabile sse è λ-stabile per ogni $\lambda \geq \omega$ sse è totalmente trascendente. Per ulteriori dettagli su teorie contabili e λ-stabilità si può consultare ad esempio [14] .

La teoria del forking in un contesto totalmente trascendente può essere studiata facilmente per mezzo del rango di Morley. Enunciamo nel seguente teorema i fatti principali, rimandando a [13] per dimostrazioni più dettagliate e per ulteriori chiarimenti.

Teorema 2.6.5. *Sia T una teoria t.t.*

1. *Siano $A \subseteq B$ insiemi in un modello di T. Siano $p(x) \subseteq q(x)$ tipi completi rispettivamente su A e B. Allora $q(x)$ è un'estensione non-forking di $p(x)$ se e solo se $RM(p) = RM(q)$.*

2. *Per ogni $p \in S(A)$, il numero di estensioni non-forking di p ad un modello è precisamente $dM(p)$.*

3. *Un tipo $p \in S(A)$ è stazionario se e solo se $dM(p) = 1$.*

4. *Sia $p \in S(A)$ un tipo stazionario. Allora esiste un elemento $c \in \bar{M}^{eq}$ tale che $Cb(p) = dcl^{eq}(c)$.*

5. *Sia $p \in S(A)$ un tipo stazionario e sia $(c_i : i < \omega)$ una sequenza di Morley per p. Allora esiste $n < \omega$ tale che $Cb(p) \subseteq dcl^{eq}(c_0, \ldots, c_n)$.*

Dimostrazione. (1) Senza perdere di generalità assumiamo $B = \bar{M}$. Assumiamo $RM(p) = RM(q)$. Allora per ogni A-automorfismo, $\alpha(q)$ è un'estensione di p di rango $RM(p)$. Se ψ è una δ-definizione per q, allora ci sono solo un numero finito di possibilità per $\alpha(\psi)$ (in quanto ci sono solo un numero finito di possibilità per $\alpha(q)$). Quindi ψ è quasi-definibile su A.

Viceversa, sia $q' = q \restriction acl^{eq}(A)$. Allora, dato che per ogni formula in $\psi \in q'$ qualche disgiunzione finita di A-coniugati di ψ è su A, e quindi in p, risulta $RM(p) = RM(q')$. Ogni tipo su insieme algebricamente chiuso ha un'unica estensione non-forking su un modello del suo stesso rango. Quindi $RM(q) = RM(p)$.
(2) É facile costruire $dM(p)$ estensioni non-forking di p su un modello (se $\phi \in p$ è tale che $dM(p) = dM(\phi)$ allora esistono $dM(p)$ formule a due a due disgiunte che implicano ϕ ...). La tesi segue allora dal fatto che ogni tipo completo su un modello ha grado 1.
(3) Segue da (2).
(4) Siano $C = Cb(p)$ e $p_0 = p \mid C$. Allora p_0 è stazionario e quindi per (3),

$dM(p_0) = 1$. Sia $\phi \in p_0$ tale che $dM(\phi) = 1$ e sia c un codice per ϕ. Sia $\bar{p}$ l'estensione di p_0 su $\bar{M}$. Sia α un automorfismo di $\bar{M}$ che fissa c. Allora $\alpha(\bar{p})$ contiene ϕ e $RM(\alpha(\bar{p})) = RM(\bar{p}) = RM(p_0)$. Cioè, $\alpha(\bar{p}) = \bar{p}$. Quindi $C \subseteq dcl^{eq}(c)$.
(5) Segue da (4). □

Definizione 2.6.6. Sia T una teoria t.t. e sia ϕ una formula. Diciamo che ϕ è strongly-minimal se $(RM, dM)(\phi) = (1, 1)$. Diciamo che un insieme D definito in un modello di T è strongly-minimal se D è ϕ-definibile da una formula strongly-minimal ϕ.

Osservazione 2.6.7. Sia D un insieme $\emptyset$-definibile in un modello saturo $\bar{M}$ di una teoria t.t. T. Allora D è strongly-minimal se e solo se per ogni sottoinsieme $Y \subseteq D$, Y è finito oppure $D \backslash Y$ è finito.

Infatti, se D è definito da una formula strongly-minimal $D(x)$ e se $Y \subseteq D$ è un sottoinsieme definito da $Y(x)$, allora chiaramente $\models Y(x) \to D(x)$. Quindi $RM(Y(x))$ è uguale a 0 o a 1.

Viceversa, se D è infinito allora $RM(D(x)) \geq 1$. Se per assurdo risultasse $RM(D(x)) > 1$ allora, per la saturazione di $\bar{M}$, D contiene un'unione disgiunta di ω sottoinsiemi Y_i tali che $RM(Y_i(x)) \geq 1$. Ma allora anche $D \backslash Y_i$ contiene una tale unione e questo è assurdo in quanto, per ipotesi, $D \backslash Y_i$ è finito.

Esempio 2.6.8. Se $(K, +, \cdot)$, allora ogni insieme definibile in K è combinazione booleana finita di equazioni polinomiali. Allora $Th(K)$ è ω-stabile ed inoltre l'insieme K è strongly minimal (in $Th(K)$). Si può consultare [13] per una trattazione approfondita.

Sia D un insieme strongly-minimal definito in un modello saturo della teoria t.t. T. Indichiamo con $D(x)$ la formula strongly-minimal che definisce D. Osserviamo che se D è $\emptyset$-definibile (cioè, $D(x)$ è una formula di L senza parametri), allora per il Teorema 2.6.5, esiste un unico tipo completo p_0 su $\emptyset$ tale che $D(x) \in p_0$ e $(RM, dM)(p_0) = (1, 1)$.

Definizione 2.6.9. Si chiama *pre-geometria* una coppia (S, cl) costituita da un insieme S e da una funzione cl definita sulle parti di S (operatore di chiusura) tali che, se indichiamo con a, b, X, Y rispettivamente elementi e sottoinsiemi di S, risulta:

1. $X \subseteq cl(X)$;

2. $X \subseteq Y \Rightarrow cl(X) \subseteq cl(Y)$;

3. $cl(cl(X)) = cl(X)$;

4. $a \in cl(X \cup \{b\}) \backslash cl(X) \Rightarrow b \in cl(X \cup \{a\})$;

5. $a \in cl(X) \Rightarrow a \in cl(X')$ per qualche insieme finito $X' \subseteq X$.

Se (S, cl) è una pre-geometria, un sottoinsieme X si dice indipendente se per ogni $a \in X$ risulta $a \notin cl(X \backslash \{a\})$. Ogni sottoinsieme X contiene un sottoinsieme massimale indipendendente X_0 e si chiama *base* per X. Tutte le basi per X hanno la stessa cardinalità che si indica con $dim(X)$ e si chiama *dimensione* di X.

Se $A \subseteq S$ si chiama *localizzazione* in A la pre-geometria (S, cl_A) dove $cl_A(X) = cl(X \cup A)$.

Una pre-geometria (S, cl) si dice:

- *banale* se per ogni insieme X risulta $X = \bigcup_{x \in X} cl(\{x\})$;

- *omogenea* se per ogni insieme chiuso X e per ogni $a, b \in S \backslash X$ esiste un X-automorfismo di S che manda a in b ;

- *modulare* se per ogni coppia di chiusi X, Y vale

$$dim(X \cup Y) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y) \ ;$$

- *localmente modulare* se la localizzazione su qualche singoletto è modulare.

Osservazione 2.6.10. Una pre-geometria (S, cl) si dice una geometria se:

- $cl(\emptyset) = \emptyset$;

- per ogni $a \in S$, cl({a})={a}.

C'è un modo canonico per associare una geometria ad una pre-geometria. Si definiscono infatti, $S' = \{cl(\{a\}) : a \in S - cl(\emptyset)\}$ e, per ogni $X \subseteq S$, se indichiamo con $X' = \{cl(\{a\}) : a \in X\}$, si pone $cl'(X') = \{cl(\{b\}) : b \in cl(X)\}$. Se (S, cl) è una pre-geometria, allora (S', cl') è una geometria.

Vediamo come si può definire una pre-geometria su un insieme strongly-minimal e studiamo alcune proprietà di questa pre-geometria.

Sia T una teoria t.t. e sia D un insieme strongly minimal $\emptyset$-definibile in un modello saturo $\bar{M}$ di T. Indichiamo con p_0 l'unico tipo su $\emptyset$ che estende $D(x)$ e tale che $(RM, dM)(p_0) = (1, 1)$.

Il seguente lemma mostra come, in un insieme strongly-minimal, la dipendenza algebrica può essere caratterizzata tramite la relazione di forking.

Lemma 2.6.11. *Per ogni a in D e per ogni $A \subseteq \bar{M}$, sono equivalenti:*

1. $a \notin acl(A)$ *;*

2. a *realizza* $p_0 \mid A$.

Dimostrazione. Sia $p(x) = tp(a/A)$. Allora il rango di Morley di p è 0 o 1 (in quanto $D(x) \in p(x)$). Se $RM(p) = 1$ allora $p(x)$ è un'estensione non-forking di p_0. Se $RM(p) = 0$ allora esiste una formula $\phi(x) \in L_A$ tale che $\models \phi(a)$ e $RM(\phi) = 0$. Cioè, a è algebrico su A. □

Lemma 2.6.12. *Se per ogni sottoinsieme* $Y \subseteq D$ *poniamo*

$$cl(Y) = acl(Y) \cap D \tag{2.9}$$

allora $(D, cl(-))$ *è una pre-geometria omogenea.*

Dimostrazione. Le condizioni (1),(2),(3) e (5) nella Definizione 2.6.9 sono ovvie. Proviamo (4). Per il Lemma 2.6.11, se b è in $acl(A) \cup \{a\}$ allora b non realizza $p_0 \mid A \cup \{a\}$. Per la simmetria del forking (Teorema 2.3.26), a non realizza $p_0 \mid A \cup \{b\}$. Quindi, ancora per il Lemma 2.6.11, $a \in acl(A \cup \{b\})$ e chiaramente $a \notin acl(A)$ in quanto, altrimenti, $b \in acl(A \cup \{a\}) \subseteq acl(A)$.

Ciò prova che $(D, cl(-))$ è una pre-geometria. L'omogeneità segue dal fatto che se $A \subseteq D$ è algebricamente chiuso ed a, b sono in D/A, allora, per il Lemma 2.6.11, $tp(a/A) = tp(b/A)$. □

Ricordiamo dal paragrafo precedente che un insieme $\emptyset$-definibile nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria stabile T si dice 1 based se per ogni a in X e per ogni $A \subseteq \bar{M}^{eq}$ tale che $tp(a/A)$ è stazionario, risulta $Cb(tp(a/A)) \subseteq acl^{eq}(a)$.

Vediamo ora come nel caso in cui la teoria T sia t.t. se consideriamo un insieme strongly-minimal D, $\emptyset$-definibile in $\bar{M}$, la proprietà di essere 1 based per D è relazionata con la modularità della pre-geometria associata a D.

Indichiamo con D^{eq} l'insieme degli elementi $c \in \bar{M}^{eq}$ tali che esiste una n-upla di elementi d in D tali che $c \in dcl^{eq}(d)$. Il seguente corollario segue direttamente dal Teorema 2.6.5 .

Corollario 2.6.13. *Sia* D *un insieme strongly-minimal definito nel modello saturo* $\bar{M}$ *della teoria t.t.* T*. Siano* a *in* D *e* $A \subseteq \bar{M}^{eq}$*. Allora* $Cb(stp(a/A)) \in D^{eq}$*.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2.6.5, $Cb(stp(a/A)) \subseteq dcl^{eq}(d_0, \ldots, d_n)$ dove ogni d_i realizza $p_0 \mid acl^{eq}(A)$. In particolare ogni d_i è in D. □

In generale, se $(S, cl(-))$ è una pre-geometria e se $X, Y \subseteq S$, indichiamo con $dim(X/Y)$ la dimensione di X relativamente alla localizzazione $(S, cl(-))$ ad Y.

Lemma 2.6.14. *Sia $(S, cl(-))$ una pre-geometria. Allora $(S, cl(-))$ è modulare se e solo se per ogni coppia di insiemi chiusi X, Y in S risulta $dim(X/Y) = dim(X/X \cap Y)$.*

Dimostrazione. Segue da semplici manipolazioni algebriche sulle definizioni osservando che, in generale, se $X, Y \subseteq S$ allora $dim(X \cup Y) = dim(X/Y) + dim(Y)$. □

Osservazione 2.6.15. Si può dimostrare, come nell'Osservazione 3.18 in [13], che nella pre-geometria associata ad un insieme strongly-minimal D, le nozioni di dimensione e rango di Morley coincidono. Cioè, per ogni b ed A in D risulta:

$$dim(b/A) = RM(tp(b/A)) \ .$$

Corollario 2.6.16. *Sia $(D, cl(-))$ la pre-geometria associata all'insieme strongly-minimal D, dove per ogni $X \subseteq D$, $cl(X) = acl(X) \cap D$. Allora $(D, cl(-))$ è modulare se e solo se per ogni a, b in D, a è indipendente da b su $cl(a) \cap cl(b)$ (indipendente nel senso del forking).*

Dimostrazione. Sia $C = acl(a) \cap acl(b) \cap D$. Assumiamo $(D, cl(-))$ modulare. Allora, per il Lemma 2.6.14, $dim(a/b) = dim(a/C)$ e quindi, dall'Osservazione 2.6.15, risulta:

$$RM(tp(a/b)) = RM(tp(a/C)) \ .$$

Dato che a è indipendente da $acl(b)$ su b, per il Teorema 2.6.5, $RM(tp(a/acl(b))) = RM(tp(a/b))$ e quindi $RM(tp(a/acl(b))) = RM(tp(a/C))$. Ancora per il Teorema 2.6.5, a è indipendente da $acl(b)$ su C. Per transitività, a è indipendente da b su C.

Il viceversa è simile: se a è indipendente da $acl(b)$ su C, allora $RM(tp(a/C)) = RM(tp(a/acl(b)))$ (Teorema 2.6.5) e quindi $dim(a/C) = dim(a/b)$ (Osservazione 2.6.15). □

Lemma 2.6.17. *Sia $(D, cl(-))$ la pre-geometria associata all'insieme strongly-minimal D. Se $(D, cl(-))$ è modulare, allora D è 1 based.*

Dimostrazione. Siano a in D ed A un insieme di parametri tali che $tp(a/A)$ è stazionario. Sia $c = Cb(tp(a/A))$. Si dimostra, sfruttando il Corollario 2.6.13, che esiste un insieme C in D, algebricamente chiuso, tale che $c = Cb(tp(a/C))$, cioè $tp(a/A)$ e $tp(a/C)$ sono stazionari paralleli (hanno un'estensione non-forking su un modello in comune). Da questo, per il Corollario 2.6.16, a è indipendente da C su $acl(a) \cap C \cap D$. Per il Teorema 2.6.5, $c \in acl^{eq}(acl(a) \cap C \cap D) \subseteq acl^{eq}(a)$. □

A conclusione di questa discussione enunciamo senza dimostrare due fatti che esprimono alcune limitazioni che impone la struttura 1 based in una teoria (di fatto condizioni equivalenti).

Il seguente lemma si trova in [13] (Teorema 3.35) e prosegue la discussione culminata nel Lemma 2.6.17.

Lemma 2.6.18. *Sia $(D, cl(-))$ la pre-geometria associata all'insieme strongly-minimal D. Sono equivalenti:*

1. *$(D, cl(-))$ è localmente modulare.*
2. *D è 1 based.*

Esempio 2.6.19. (i) Se $(K, +, \cdot)$ è un campo algebricamente chiuso, allora l'insieme Strongly Minimal K non è localmente modulare e, in particolare, $Th(K)$ è un esempio di teoria ω-stabile che non è 1 based.
(ii) Se R è un anello con divisione e V è uno spazio vettoriale su R, ∞-dimensionale, allora $Th(V)$ è strongly minimal. Inoltre, come ogni modulo, è 1 based. Si può consultare [13] per approfondimenti.

Riassumiamo nel seguente teorema i risultati contenuti nei Lemmi 2.6.12, 2.6.17 e 2.6.18 .

Teorema 2.6.20. *Sia D un insieme strongly minimal definito nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria totalmente trascendente T. Se per ogni $X \subseteq D$ poniamo $cl(X) = acl(X) \cap D$, allora $(D, cl(-))$ è una pre-geometria omogenea e risulta:*

1. *$(D, cl(-))$ modulare $\Rightarrow$ D 1 based ;*
2. *$(D, cl(-))$ localmente modulare $\Leftrightarrow$ D 1 based .*

Capitolo 3

Gruppi Weakly Normal

L'obbiettivo finale di questo capitolo è dimostrare che, se un gruppo G è interpretabile nella struttura $(\mathbb{Z}, +)$, allora G è, a meno di isomorfismi, un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato, cioè G ha un sottogruppo normale, abeliano finitamente generato e di indice finito (Teorema 3.3.4). Otteniamo questo fatto come un'applicazione di un risultato più generale, ad opera di Pillay, Hrushovski e Poizat, presente in [7] e che riguarda la classe di gruppi H tali che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal (Teorema 3.3.2).

Nel Capitolo 2 si è mostrato che, se H è un gruppo abeliano o più in generale un modulo, allora $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal e quindi stabile e 1 based. In generale, se G è un gruppo tale che $Th(G)$ è una teoria Weakly Normal, allora G è *virtualmente abeliano* (abelian-by-finite), cioè G ha un sottogruppo abeliano di indice finito (vedi [6]). In [7] viene dimostrato che, se G' è un gruppo definibile in un modello di una teoria Weakly Normal, allora $Th(G')$ è una teoria Weakly Normal e in particolare, G' è virtualmente abeliano. Per questi motivi, in accordo con [4], diciamo che un gruppo G è Weakly Normal se G è definibile in un modello di una teoria Weakly Normal.

In realtà, per ragioni tecniche, è conveniente rilassare l'ipotesi di definibilità. Un gruppo G si dice *type-definibile* in $\bar{M}$ se:

- l'universo di G coincide con l'insieme di realizzazione in $\bar{M}$ di un tipo parziale $\Phi_G(x)$;
- esiste un tipo parziale $\Psi(x, y, z)$ tale che, l'insieme di realizzazione di $\Psi(x, y, z)$ in $\bar{M}^3$ definisce un operazione di gruppo su G.

Allora chiameremo:

- gruppo stabile, un gruppo type-definibile nel modello $\bar{M}$ della teoria stabile T ;

- gruppo Weakly Normal, un gruppo type-definibile nel modello $\bar{M}$ della teoria stabile e 1 based T.

In accordo con queste definizioni, se G è un gruppo Weakly Normal allora G è virtualmente abeliano (Teorema 3.2.8). Nel capitolo precedente si è visto che se G è un gruppo interpretabile in una struttura H, allora G è isomorfo ad un gruppo definibile in H^{eq}. Quindi, dato che se una teoria T è Weakly Normal allora T^{eq} è Weakly Normal, se un gruppo G è interpretabile in una struttura H tale che $Th(H)$ è Weakly Normal, allora G è un gruppo Weakly Normal e in particolare virtualmente abeliano (Lemma 3.3.1).

Questo è sicuramente un inizio in quanto, essendo $Th(\mathbb{Z}, +)$ una teoria Weakly Normal, se un gruppo G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$, allora G è virtualmente abeliano. Ciò però non basta se si vuole ottenere una caratterizzazione dei gruppi interpretabili in questa struttura. Ad esempio, il gruppo additivo dei razionali $(\mathbb{Q}, +)$ non è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ (Corollario 3.3.5), ma certamente è virtualmente abeliano (in quanto è abeliano).

Intuitivamente, il problema è che $\mathbb{Z}$ con la sola operazione di somma non è in grado di definire "cose" troppo complicate e, in generale, vale la stessa cosa per ogni gruppo che gode dell'eliminazione dei quantificatori tramite formule Weakly Normal. Allontanandosi dall'intuizione però, provare questa cosa non è semplice. La dimostrazione che proponiamo (crediamo che attualmente sia l'unica disponibile) sfrutta la cosiddetta teoria dei tipi generici per i gruppi stabili.

Il contesto di riferimento è il seguente: si suppone di lavorare nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria stabile T. Si considera un gruppo stabile G ed un insieme V entrambi type-definibili in $\bar{M}$. Si suppone inoltre che G agisca su V e che tale azione sia definibile e transitiva. Ricordiamo che un'azione di G su V si dice transitiva se, per ogni $a, b \in V$ esiste $g \in G$ tale che $a = g \cdot b$ (sostanzialmente G ha una sola orbita in V). Un'azione transitiva si dice regolare se, per ogni $a, b \in V$ esiste un unico $g \in G$ tale che $a = g \cdot b$. Allora, se G e V sono come sopra, e se l'azione di G su V è transitiva, la coppia (G, V) si chiama *spazio omogeneo* (l'azione è nascosta nella notazione). Se invece l'azione è regolare, (G, V) si chiama *spazio omogeneo principale*. Gli spazi omogenei principali coinvolti nello studio del nostro problema sono sostanzialmente di due tipi:

- (G, G) dove G è un gruppo stabile (o Weakly Normal) e l'azione è data dalla moltiplicazione (destra o sinistra) ;

- $(H, H \cdot a)$ dove H è un sottogruppo type-definibile di un gruppo stabile G (o Weakly Normal), $H \cdot a$ è una classe laterale destra e l'azione è data dalla moltiplicazione a sinistra.

Dato uno spazio omogeneo (G, V) siamo interessati a studiare i sottoinsiemi relativamente definibili di V, da formule della teoria "globale" T (intersezione di un definibile in $\bar{M}$ con V) ed inoltre i tipi di T che estendono il tipo parziale "$x \in V$". Osserviamo che G agisce per "traslazione" su tali tipi (Lemma 3.1.7). Diciamo che un sottoinsieme relativamente definibile X di V è *generico* in V se un numero finito di traslati di X copre V (Definizione 3.1.5). Ad esempio, ogni sottogruppo di indice finito è un particolare insieme generico. Diciamo che un tipo che estende V è generico in V se "contiene" esclusivamente insiemi generici. Tutto il Paragrafo 3.1 è dedicato allo studio dei tipi generici per uno spazio omogeneo in una teoria stabile ed inoltre alle relazioni che intercorrono fra tipi generici e forking. In particolare, per un tipo $p \in S(\bar{M})$ che estende V, risulta (Lemma 3.1.7):

p è generico in V se e solo se per ogni $g \in G$, $g \cdot p$ è non-forking sul $\emptyset$.

Se (G, V) è uno spazio principale omogeneo e se p è un tipo che estende V, prendiamo in considerazione due sottogruppi di G:

- lo stabilizzatore di p, $Stab(p)$, definito come il sottogruppo type-definibile di G che contiene tutti gli elementi di G che fissano p (Definizione 3.1.12) ;
- la componente connessa G_0, definita come il sottogruppo type-definibile di G, intersezione di tutti i sottogruppi relativamente definibile e di indice finito in G (Definizione 3.1.10).

Il risultato principale del Paragrafo 3.1 stabilisce che, nel caso di spazi principali omogenei, un tipo p è generico in V se e solo se $Stab(p) = G_0$ ed inoltre, l'insieme dei tipi generici in V sono in corrispondenza biunivoca con le orbite di G_0 in V (Lemma 3.1.14). Questo vuol dire che ogni tipo generico in V estende un'orbita della componente connessa G_0 in V ed inoltre esso è l'unico che estende quella particolare orbita.

Questi fatti sono in generale validi per spazi omogenei principali (G, V) definiti all'interno di una teoria stabile T. Sia G un gruppo Weakly Normal (cioè, assumiamo T 1 based). Ciò che accade in questo caso è che, in un certo senso, ogni elemento $g \in G$ è generico nella classe laterale $H \cdot g$, per qualche sottogruppo connesso e type-definibile H di G, cioè il tipo di a è un tipo generico per lo spazio $(H, H \cdot a)$ (Teorema 3.2.7). Sostanzialmente, a appartiene solo ad insiemi definibili generici per la classe laterale $H \cdot a$. Inoltre, il sottogruppo H coincide con lo stabilizzatore del tipo di a. Queste osservazioni ci permettono di provare il risultato principale di questo capitolo (Teorema 3.3.2). Riassumiamo qui i passaggi "cruciali". Sia H un gruppo tale che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal (quindi, un gruppo abeliano, un modulo o al più un gruppo virtualmente abeliano). Sia G un gruppo interpretabile in H e sia n la "dimensione" dell'interpretazione. Allora:

- Il gruppo $H^n \times G$ è Weakly Normal e siamo in grado, usando il Teorema 3.2.7, di trovare un sottogruppo $K \leq H^n \times G$, connesso e type-definibile tale che $\pi_2(K) = G_0$ (π_2 è la seconda proiezione a fattore).

- Se poniamo $L = \pi_1(K)$, siamo in grado di dimostrare che l'insieme

$$(L \times G_0) \cap K$$

  è il grafico di un omomorfismo suriettivo type-definibile da L su G_0.

- Per compattezza, esiste un sottogruppo definibile $A \leq H^n$, esiste un sottogruppo definibile $G' \leq G$ di indice finito (perchè contenente G_0) ed esiste un omomorfismo suriettivo e definibile $f : A \to G'$ (Osservazione 3.2.3 oppure Lemma 3.2.2).

- Ponendo $B = Ker(f)$, risulta $G' \cong A/B$.

Il risultato è forte. Osserviamo tuttavia che, a priori, tutto quello che è definibile, è definibile nella struttura che "ospita" G. Quindi, quando affermiamo che G ha un sottogruppo definibile G' di indice finito, intendiamo in realtà dire che G' è definibile con formule di H.

Questo risultato si specializza al caso in cui consideriamo un gruppo G interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. Per il Teorema 3.3.2, G ha un sottogruppo G' abeliano finitamente generato e di indice finito. A priori non è detto che G' sia normale in G. Tuttavia, l'intersezione $N(G')$ di tutti i coniugati di G' è un sottogruppo normale di G. Dato che G' ha indice finito, allora $N(G')$ equivale ad una intersezione finita di coniugati di G'. In particolare $N(G')$ ha ancora indice finito ed essendo un sottogruppo di G' è abeliano finitamente generato. Quindi se G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$, G è un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato.

Tutto il lavoro presente in questa tesi converge nel Teorema 3.3.4:

Teorema. *Un gruppo G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ se e solo se G è un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato.*

L'impostazione di questo capitolo segue principalmente quella presente in [4] e anche in [6]. Si è cercato, quindi, di uniformare per quanto possibile la notazione. Il risultato principale, Teorema 3.3.2, è presente in [7].

3.1 Gruppi Stabili e spazi omogenei

In questo paragrafo sono esposti i fondamentali della teoria dei gruppi stabili e tipi generici. Si prova l'esistenza di tipi generi e si caratterizzano attraverso la teoria del forking. Si danno alcune proprietà riguardanti gli stabilizzatori e la componente connessa.

Sia T una teoria stabile. Sia $\Phi(x)$ un tipo parziale di T. Indichiamo con Φ l'insieme di realizzazione di $\Phi(x)$ in $\bar{M}$. Diciamo che un sottoinsieme $X \subseteq \Phi$ è relativamente A-definibile se esiste una formula ϕ su A tale che $X = \{x \in \Phi : \models \phi(x)\}$.

In generale, diremo che un sottoinsieme $X \subseteq \bar{M}$ è type-definibile su A se X coincide con l'insieme di realizzazione di qualche tipo parziale su A. Formalmente, un gruppo G type-definibile in $\bar{M}$ è costituito da una coppia $(\Phi(x), \Psi(y_1, y_2, y_3))$ di tipi parziali tali che Ψ è il grafico di un'operazione di gruppo su Φ.

Definizione 3.1.1. Chiamiamo *gruppo stabile* un gruppo type-definibile nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria stabile T.

Lemma 3.1.2. *Sia G un gruppo stabile e sia $\phi(x,y)$ una formula. Sia $\{c_i : i \in I\}$ un insieme di parametri tale che per ogni i, $\phi(x, c_i)$ definisce un sottogruppo H_i di G. Allora esiste un sottoinsieme finito $J \subseteq I$ tale che:*

$$\bigcap_{i \in I} H_i = \bigcap_{j \in J} H_j \ .$$

Dimostrazione. Indichiamo con S l'insieme dei sottogruppi di G definiti da un'istanza di ϕ e sia S' l'insieme di tutte le intersezioni di sottogruppi in S. Sia n tale che non esiste una successione (a_i, b_i) di lunghezza maggiore di n tale che $\models \phi(a_i, b_j)$ sse $i \leq j$ (Lemma 2.3.3).
Claim: Ogni gruppo in S' può essere scritto come intersezione di al più n gruppi in S.
dim. Supponiamo per assurdo che esiste $k > n$ ed esistono sottogruppi $(H_i : i \leq k)$ in S tali che per ogni i, H_i non contiene $\bigcap_{i \neq j}(H_j)$. Allora, se per ogni i scegliamo $h_i \in \bigcap_{i \neq j}(H_j) \setminus H_i$ e se consideriamo la successione $a_o = 1, \ldots, a_{i+1} = a_i \cdot h_i$, risulta:

$$\models \phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \leq j \ .$$

Contro la scelta di n. Questo prova il Claim e il lemma. □

Definizione 3.1.3. Uno Spazio omogeneo principale (G, V) è costituito da un gruppo G e da un insieme V, entrambi type-definibili nel modello saturo

$\bar{M}$ della teoria stabile T e tali che esista un'azione (definibile) di G su V transitiva e regolare:

$$\forall x, y \in V,\ \exists\ unico\ g \in G\ tale\ che\ g \cdot x = y\ .$$

(G, V) si chiama semplicemente spazio omogeneo se l'azione non è regolare.

Se (G, V) è uno spazio omogeneo, indichiamo con $G(x), V(x)$ i tipi parziali che lo "definiscono". Mentre, se non diversamente specificato, G, V sono gli insiemi di realizzazione di $G(x), V(x)$ nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria stabile T.

Esempio 3.1.4. Ogni gruppo stabile può essere visto come spazio omogeneo principale in due modi, con l'azione data dalla moltiplicazione a sinistra e a destra. Inoltre se H è un sottogruppo e $H \cdot g$ è una classe laterale destra allora $(H, H \cdot g)$ è uno spazio omogeneo principale con l'azione data dalla moltiplicazione a sinistra. (Simile per classi sinistre.)

Definizione 3.1.5. Sia (G, V) uno spazio omogeneo.

1. Un sottoinsieme X di V relativamente definibile (intersezione di un definibile in $\bar{M}$ con V) si dice generico di V se un numero finito di traslati di X copre V, cioè se esistono $g_1, \dots, g_k$ in G tali che
$$V = g_1X \cup \dots \cup g_kX\ .$$
2. Un tipo $p \in S(A)$ si dice generico di V se p estende '$x \in V$' e se ogni sottoinsieme di V relativamente definibile da una formula in p è generico.

In uno spazio omogeneo (G, V) esistono sempre insiemi generici.

Lemma 3.1.6. *Sia (G, V) uno spazio omogeneo e sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme relativamente definibile. Allora X o $V - X$ è generico in V.*

Dimostrazione. Sia $R(x, y)$ la relazione definita come segue: per ogni $x, y \in V \times G$, $\models R(x, y) \Leftrightarrow x \in y \cdot X$. Allora $R(x, 1)$ "definisce" X in V. Indichiamo con M_0 la struttura (G, V, R) e sia $T_0 = Th(M_0)$. Allora la formula $R(x, y)$ è stabile in T_0. Inoltre per ogni $g \in G$, la mappa $x \mapsto g \cdot x$ e $y \mapsto g \cdot y$, per $x \in V$ e $y \in G$, è un'automorfismo di M_0. Dato che per ogni $x_1, x_2 \in V$, per ipotesi esiste $g \in G$ tale che $x_1 = g \cdot x_2$, esiste un unico tipo completo p_0 di T_0 sul vuoto che è realizzato in V e quindi se $A \subseteq V$ è un sottoinsieme $\emptyset$-definibile in M_0, allora $A = V$.
Claim: X è generico in V se e solo se la formula $R(x, 1)$ è non-forking sul $\emptyset$

in T_0.
dim. Per il Lemma 2.3.23, $R(x,1)$ è non-forking sul $\emptyset$ se e solo se una combinazione booleana positiva ψ di coniugati di $R(x,1)$ è $\emptyset$-definibile e coerente. Quindi esistono $g_1,\ldots,,g_k$ in G tali che $\psi(x,g_1,\ldots,,g_k)$ equivale a V ed osserviamo che, rimpiazzando ogni congiunzione in ψ con uno dei suoi "fattori", possiamo assumere che ψ sia una disgiunzione positiva. Quindi otteniamo:

$$R(x,1) \text{ è non-forking sul } \emptyset \text{ sse } R(x,g_1)\vee\cdots\vee R(x,g_1) \text{ equivale ad } V\ .$$

Questa condizione esprime proprio il fatto che X è generico in V e quindi il claim è provato.

Allo stesso modo, $V-X$ è generico se e solo se $\neg R(x,1)$ è non-forking sul $\emptyset$ in T_0. Ma la formula $R(x,1)\vee\neg R(x,1)$ (essendo tautologica) chiaramente è non forking sul $\emptyset$. Questo implica che $R(x,1)$ oppure $\neg R(x,1)$ è non-forking sul $\emptyset$ in T_0. Cioè, X è generico oppure $V-X$ è generico in V. □

Consideriamo ora i tipi "globali" $p\in S(\bar{M})$ che estendono $V(x)$. Osserviamo che G agisce sull'insieme di tali tipi in quanto G agisce su V. Denotiamo con $\mathcal{O}_V$ l'insieme dei tipi globali generici in V, cioè $p\in S(\bar{M})$ è in $\mathcal{O}_V$ se e solo se p estende $V(x)$ ed ogni formula in p definisce un sottoinsieme $X\subseteq V$ generico in V.

Lemma 3.1.7. *Sia (G,V) uno spazio omogeneo e sia $\mathcal{O}_V$ l'insieme dei tipi generici "globali" di V. Allora:*

1. *$\mathcal{O}_V$ è non vuoto.*
2. *G agisce transitivamente su $\mathcal{O}_V$.*
3. *Per ogni $p(x)\in S(\bar{M})$, $p(x)\in\mathcal{O}_V$ se e solo se per ogni $g\in G$, $g\cdot p$ è non-forking sul $\emptyset$.*

Dimostrazione. Costruiamo una struttura ausiliaria che ci permetterà di dimostrare i tre punti del teorema. Per ogni $\phi(x,z)$, per ogni $g\in G$ e per ogni b in $\bar{M}$, indichiamo con:

$$X_\phi(g,b)=\{x\in V:\models\phi(g\cdot x,b)\}$$

il sottoinsieme di V relativamente definito da $\phi(g\cdot x,b)$. Sia Γ_ϕ l'insieme di tutti gli $X_\phi(g,b)$ al variare di $g\in G$ e b in $\bar{M}$. Indichiamo inoltre con ε_ϕ la relazione su $V\times\Gamma_\phi$ così definita:

$$\varepsilon_\phi(x,X_\phi(g,b))\Leftrightarrow x\in X_\phi(g,b)\ .$$

Consideriamo la struttura a più sorti $\tilde{V}$ definita come segue: le sorti di $\tilde{V}$ sono V e i Γ_ϕ al variare di $\phi(x,z) \in$ L, mentre le ε_ϕ sono le relazioni che collegano V ai Γ_ϕ. Sia $T' = Th(\tilde{V})$. Osserviamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei tipi completi di T su $\bar{M}$ che estendono $V(x)$, e l'insieme dei tipi completi di T' che contengono V, cioè che contengono la formula $\varepsilon_{x=x}(x,V)$. Infatti, se $p \in S(\bar{M})$ è un tipo completo che estende $V(x)$, allora il corrispondente tipo p' di T' conterrà la formula $\varepsilon_\phi(x, X_\phi(g,b))$ ogni volta che $\phi(g \cdot x, b) \in p(x)$ (e viceversa). I seguenti fatti sono di facile verifica:

- ogni insieme definibile in $\tilde{V}$ è definibile da una formula senza quantificatori ;
- ogni formula ε_ϕ è stabile per T' ;
- per ogni $h \in G$ la funzione definita da $x \mapsto h \cdot x$ e $X_\phi(g,b) \mapsto h \cdot X_\phi(g,b)$ è un automorfismo di $\tilde{V}$;
- ogni elemento in V ha lo stesso tipo completo su $\emptyset$ in $\tilde{V}$.

Da queste proprietà segue che, in $\tilde{V}$, esiste un unico tipo sul vuoto p'_0 contenente V. Sia Y l'insieme dei tipi completi $p' \in S(\tilde{V})$ che contengono V e tali che, per ogni $\phi(x,z)$, $p' \upharpoonright \varepsilon_\phi$ è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile. Per ogni $p' \in Y$ e per ogni ε_ϕ, $p' \upharpoonright \varepsilon_\phi$ contiene $p'_0 \upharpoonright \varepsilon_\phi$ ed è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile. Quindi, per il Lemma 2.3.19, l'insieme $\{p' \upharpoonright \varepsilon_\phi : p' \in Y\}$ è finito e G agisce transitivamente su di esso.

Claim: $Y = \{p' \in S(\tilde{V}) : p \in \mathcal{O}_V\}$.

dim. È sufficiente provare che un sottoinsieme X di V relativamente definibile è generico in V se e solo se X è contenuto in qualche $p' \in Y$. Se X è generico allora esistono $g \in G$ e $p' \in Y$ tali che $g \cdot X \in p'$ e quindi $X \in g^{-1} \cdot p' \in Y$. Viceversa, siano $X \in \Gamma_\phi$ e $p' \in Y$ tali che $X \in p'$. Allora, per quanto visto prima, $\{p' \upharpoonright \varepsilon_\phi : p' \in Y\}$ è finito e G agisce transitivamente su questo insieme. Ne segue che qualche unione finita X' di traslati di X è in ogni p' in Y. Ma allora, il complementare di X' non può essere generico, in quanto se lo fosse, per la prima parte di questa dimostrazione, dovrebbe essere contenuto in qualche $p' \in Y$. Per il Lemma 3.1.6, X' è generico in V e quindi X è generico in V. Con questo il claim è provato.

Passiamo ora alla prova dei punti del lemma.
(1) Per il Teorema 2.3.26, p_0 ha un'estensione non-forking su $\tilde{V}$. Allora Y è non vuoto e, per il claim, $\mathcal{O}_V$ è non vuoto.
(2) Per ogni ε_ϕ, detta E_ϕ la relazione di equivalenza $\emptyset$-definibile (e quindi G-invariante) data dal Lemma 2.3.19, G agisce sulle E_ϕ-classi. Per compattezza,

G agisce sulle E-classi, dove E è l'intersezione di tutte le E_ϕ. Allora G agisce su Y e quindi su $\mathcal{O}_V$.
(3) Sia p generico in V. Per il claim, p' è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile in T'. Per il Teorema 2.3.26, p' ha al più $2^{|T|}$ immagini sotto l'azione degli automorfismi di $\tilde{V}$. Quindi p' ha al più $2^{|T|}$ immagini sotto l'azione degli automorfismi di $\bar{M}$. □

Sia (G, V) uno spazio omogeneo e sia $p \in S(A)$ un tipo completo che estende $V(x)$. Sia $p' \in S(M)$ una sua estensione su un modello. Siamo interessati a vedere quando, se p è generico in V, p' è generico in V e viceversa. Il risultato contenuto nel seguente lemma stabilisce che ciò avviene precisamente quando si passa per estensioni non-forking.

Osserviamo che se $p \in S(A)$ è un tipo completo che estende $V(x)$, allora esiste a in V tale che $p = tp(a/A)$. Infatti, p è realizzato in $\bar{M}$ e, dato che p estende $V(x)$, tale realizzazione è in V (perchè V è proprio l'insieme di realizzazione di $V(x)$ in $\bar{M}$).

Lemma 3.1.8. *Sia (G, V) uno spazio omogeneo. Sia $a \in V$ e consideriamo $p(x) = tp(a/A)$. Sono equivalenti:*

1. *$p(x)$ è generico in V ;*
2. *esiste un'estensione non-forking $p'(x)$ di $p(x)$ su $\bar{M}$ tale che $p'(x)$ è generico in V ;*
3. *ogni estensione non-forking di $p(x)$ su $\bar{M}$ è un tipo generico in V ;*
4. *se $g \in G$ è tale che a è indipendente da g su A, allora $g{\cdot}a$ è indipendente da g su A.*

Dimostrazione. $(1 \to 2)$ Dal Lemma 3.1.7 otteniamo che, un sottoinsieme $X \subseteq V$ relativamente definibile è generico se e solo se per ogni $g \in G$, $g \cdot X$ è non-forking sul $\emptyset$ (nel senso che è definibile da una formula che è non-forking sul $\emptyset$). Sia p' un'estensione non-forking di p su un modello. Sia X un sottoinsieme di V relativamente definibile da una formula in p'. Per il Teorema 2.3.26, X è non-forking su A e quindi, per il Lemma 2.3.23, qualche combinazione booleana X' di coniugati di X è A-definibile e coerente e quindi è in p. Dato che p è generico, X' è non-forking sul $\emptyset$ e quindi X è non-froking sul $\emptyset$. Allo stesso modo, per ogni $g \in G$, $g \cdot X$ non si divide sul $\emptyset$. Per l'osservazione di sopra, X è generico in V.
$(2 \to 3)$ Segue dal fatto che le estensioni non-forking sono tutte coniugate fra loro.
$(3 \to 4)$ Sia $g \in G$ tale che a è indipendente da $\{g\}$ su A. Sia M un modello

saturo contenente $A \cup \{g\}$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre a indipendente da M su A (in caso contrario, si può rimpiazzare a con una realizzazione in $\bar{M}$ di un'estensione non-forking di $tp(a/A \cup \{g\})$ su M). Per (3), $tp(a/M)$ è generico e quindi, per ogni $g \in G$, $tp(g \cdot a/M)$ è definibile su $acl^{eq}(\emptyset)$. Per transitività, $tp(g \cdot a/A) \subseteq tp(g \cdot a/A \cup \{g\})$ è un'estensione non-forking.
$(4 \to 1)$ Sia $g \in G$. Sia M un modello saturo contenente $A \cup \{g\}$ e sia p' un'estensione non-forking di p ad M. Come prima, senza perdere di generalità, assumiamo $p' = tp(a/M)$. Quindi a è indipendente da M su A e, per transitività, a è indipendente da M su $A \cup \{g\}$. Quindi $tp(g \cdot a/M)$ è quasi-definibile su $A \cup \{g\}$. Per ipotesi, $g \cdot a$ è indipendente da $A \cup \{g\}$ su A e quindi, per transitività, $tp(g \cdot a/M)$ è quasi-definibile su A. Questo mostra che, dopo aver inserito nel linguaggio costanti che danno un "nome" agli elementi di A, $tp(a/M)$ è generico (cioè, $tp(a/M)$ è generico per $Th((\bar{M}, a)_{a \in A})$). Ma per la definizione di formula generica, tale nozione è invariante per aggiunzione di costanti al linguaggio. Allora $tp(a/M)$ è generico e quindi $tp(a/A)$ è generico. $\square$

Sia G un gruppo stabile. Allora possiamo considerare lo spazio omogeneo (G, G) in due modi: con l'azione data dalla moltiplicazione a destra e a sinistra (Esempio 3.1.4). Allora si dimostra che un sottoinsieme $X \subseteq G$ è generico in G per l'azione data dalla moltiplicazione a sinistra se e solo se X è generico in G per l'azione data dalla moltiplicazione a destra (per una dimostrazione di questo fatto si può consultare il Lemma 6.10 in [4]). Diremo quindi che un elemento $a \in G$ è generico in G su A se $tp(a/A)$ è un tipo generico in G (equivalentemente per l'azione destra o sinistra).

In generale, se (G, V) è uno spazio omogeneo ed $a \in V$, diciamo che a è generico in V su A se $tp(a/A)$ è generico in V.

Lemma 3.1.9. *Sia (G, V) uno spazio omogeneo. Siano $a \in V$ e $g \in G$ tali che g è generico in G su $\{a\}$. Allora $g \cdot a$ è generico in V su $\emptyset$.*

Dimostrazione. È un'applicazione dell'equivalenza $(1) \leftrightarrow (4)$ del Lemma 3.1.8. Sia $h \in G$ tale che $g \cdot a$ è indipendente da h sul $\emptyset$. A meno di considerare una realizzazione h' di un'estensione non-forking su un modello contenente $\{g, a\}$, possiamo assumere h indipendente da $\{g, a\}$ sul $\emptyset$. Per simmetria g è indipendente da $\{h, a\}$ sul $\emptyset$ e, per transitività, g è indipendente da h su a. Dato che g è generico in G su $\{a\}$, per il Lemma 3.1.8, $h \cdot g$ è indipendente da h su a. Ancora per transitività, $h \cdot g$ è indipendente da $\{h, a\}$ sul $\emptyset$ e, per simmetria, h è indipendente da $\{h \cdot g, a\}$ sul $\emptyset$. In particolare, h è indipendente da $\{h \cdot (g \cdot a)\}$ sul $\emptyset$. Per il Lemma 3.1.8 $g \cdot a$ è generico in V sul $\emptyset$. $\square$

Definizione 3.1.10. Sia G un gruppo stabile. Si chiama *componente connessa* di G il sottogruppo type-definibile G_0 intersezione di tutti i sottogruppi relativamente $\emptyset$-definibili e di indice finito in G. Diremo che G è connesso se $G = G_0$.

Corollario 3.1.11. *Sia G un gruppo stabile. Allora la sua componente connessa G_0 è contenuta in ogni sottogruppo relativamente definibile e di indice finito in G e quindi G_0 coincide con l'intersezione di tutti questi sottogruppi. In particolare G_0 è un sottogruppo normale.*

Dimostrazione. Per ogni $\phi(x, y)$ sia G^0_ϕ l'intersezione di tutti i sottogruppi di G relativamente definibili da istanze di ϕ. Per il Lemma 3.1.2, G^0_ϕ è intersezione di un numero finito di tali sottogruppi e quindi è ancora un sottogruppo di indice finito. Allora $G_0 \subseteq G^0_\phi$ in quanto G^0_ϕ è $\emptyset$-definibile. □

Definizione 3.1.12. Sia (G, V) uno spazio omogeneo e sia $p \in S(\bar{M})$ un tipo "globale" che estende $V(x)$. Si chiama *stabilizzatore* di p il sottogruppo

$$Stab(p) = \{g \in G : gp = p\} .$$

Se $p \in S(A)$ è un tipo stazionario, definiamo lo stabilizzatore di p come lo stabilizzatore della sua unica estensione non-forking $p' \in S(\bar{M})$.

Lemma 3.1.13. *Sia (G, V) uno spazio omogeneo. Allora:*

1. *Se $p \in S(\bar{M})$, allora $Stab(p)$ è intersezione di al più $|T|$ sottogruppi relativamente definibili di G. Inoltre, $Stab(p)$ è type-definibile su $Cb(p)$.*

2. *Siano $a \in V$ ed A un insieme di parametri tale che $p(x) = tp(a/A)$ è stazionario. Allora, per ogni $g \in G$, $g \in Stab(p)$ se e solo se ogni volta che a' realizza $p \mid (A \cup \{g\})$, $g \cdot a'$ realizza $p \mid (A \cup \{g\})$.*

Dimostrazione. (1) Per ogni $\phi(x; z)$ sia $\phi'(x; y, z)$ la formula $\phi(y \cdot x, z)$. Sia $\delta(y, z)$ una ϕ'-definizione di p e definiamo:

$$Stab_{\phi'}(p) = \{g \in G : \forall y, z(\delta(y \cdot g, z)) \leftrightarrow \delta(y, z)\} .$$

Allora risulta $Stab(p) = \bigcap_{\phi'} Stab_{\phi'}(p)$.
(2) Osserviamo che, in generale, un tipo q è definibile su un insieme A se e solo se $g \cdot q$ è definibile su A. Sia $g \in Stab(p)$ e sia M un modello contenente $\{g\}$. Dal fatto che p è stazionario e dall'osservazione precedente segue che $p \mid M$ e $g \cdot (p \mid M)$ coincidono se e solo se p e $g \cdot p$ coincidono. □

Il seguente lemma è valido per spazi principali omogenei e quindi è applicabile nei casi descritti nell' Esempio 3.1.4.

Lemma 3.1.14. *Sia (G, V) uno spazio principale omogeneo. Sia $p(x) \in S(\bar{M})$ un tipo che estende $V(x)$. Allora:*

1. *p è un tipo generico di $V \Leftrightarrow Stab(p) = G_0$;*

2. *per ogni orbita $G_0 \cdot a$ di G_0 in V, esiste un unico tipo generico $q \in S(\bar{M})$ che estende "$x \in G_0 \cdot a$".*

Dimostrazione. (1) Supponiamo che $p \in S(\bar{M})$ sia generico in V. Mostriamo prima che $G_0 \subseteq Stab(p)$. Siano $\phi(x, z)$ una formula e ε_ϕ la formula $\phi(y \cdot x, z)$. Allora, come nel Lemma 3.1.7, per ogni $g \in G$, $g \cdot p \restriction \varepsilon_\phi$ è un'estensione non-forking di $p_0 = (p \restriction \varepsilon_\phi) \restriction \emptyset$ (tutti i tipi generici contengono le stesse ε_ϕ-formule $\emptyset$-definibili in quanto gli insiemi che definiscono sono G-invarianti). Consideriamo la relazione di equivalenza finita E_ϕ su V data dal Lemma 2.3.19 applicato alla formula ε_ϕ e al tipo p_0. Allora E_ϕ è $\emptyset$-definibile e G-invariante (cioè, G agisce sull'insieme delle E_ϕ-classi). Definiamo G^0_ϕ come il sottogruppo di G che fissa ogni E_ϕ-classe. Allora per ogni $g \in G$, la classe laterale $g \cdot G^0_\phi$ agisce sulle E_ϕ-classi e, dato che queste sono in numero finito, G^0_ϕ ha indice finito in G. Quindi, per ogni ϕ, $G_0 \subseteq G^0_\phi$. Ma se $h \in G^0_\phi$ e x realizza p_0 allora $h \cdot x$ realizza $h \cdot p_0$ e, dato che G^0_ϕ fissa le E_ϕ-classi, $h \cdot p_0 = p_0$. Cioè, $G_0 \subseteq Stab(p)$. Per l'altro verso dell'inclusione osserviamo prima che, se p è generico in V allora esiste $a \in V$ tale che p contiene il tipo parziale "$x \in G_0 \cdot a$" (l'orbita di a sotto l'azione di G_0). Questo perchè, per ogni congiunzione finita di gruppi H in G_0 il numero delle orbite di H in V è uguale all'indice di H in G ed è quindi finito. Allora, per ogni congiunzione finita di gruppi in G_0, una sua orbita è contenuta in p (in quanto p estende $V(x)$). Per compattezza un'orbita di G_0 in V è contenuta in p. Sia quindi $a \in V$ tale che "$x \in G_0 \cdot a$" è contenuto in p. Se $g \in Stab(p)$, allora "$x \in g \cdot G_0 \cdot a$" è contenuto in p e quindi $g \cdot G_0 \cdot a \cap G_0 \cdot a$ è non vuoto. Allora esistono $g_1, g_2 \in G_0$ tali che $g \cdot g_1 \cdot a = g_2 \cdot a$. Ma G agisce regolarmente su V e quindi $g \cdot g_1 = g_2$. Cioè $g = g_2 \cdot g_1^{-1} \in G_0$. Si è quindi provato che se l'azione di G su V è regolare e p è generico per tale azione, allora $G_0 = Stab(p)$.

Viceversa, se $p \in S(\bar{M})$ è un tipo che estende $V(x)$ e se supponiamo che $Stab(p) = G_0$, allora per ogni $\phi \in p$, seguendo le notazioni del Lemma 3.1.13, $Stab_{\phi'}(p)$ ha indice finito e quindi un numero finito di traslati di ϕ copre V. Cioè, p è generico in V.

(2) Dalla dimostrazione del punto (1), se p è generico in V, allora esiste $a \in V$ tale che p contiene l'orbita $G_0 \cdot a$. Sia $G_0 \cdot b$ un'altra orbita e sia g l'unico elemento di G tale che $g \cdot a = b$. Allora $g \cdot p$ è un tipo generico che contiene "$x \in g \cdot G_0 \cdot a$". Dalla normalità di G_0 in G, $(g \cdot G_0) \cdot a = (G_0 \cdot g) \cdot a = G_0 \cdot b$. Quindi $g \cdot p$ estende "$x \in G_0 \cdot b$". In modo simile si dimostra che se p, q sono

generici che estendono la stessa orbita allora, per la regolarità dell'azione, coincidono. □

Osservazione 3.1.15. Siano G un gruppo stabile, $H \leq G$ un sottogruppo e $a \in G$. Allora il Lemma 3.1.14 si applica allo spazio $(H, H \cdot a)$, vedi Esempio 3.1.4. In particolare, se H è connesso, cioè non contiene sottogruppi di indice finito (in H), allora esiste un unico tipo "globale" p generico in $H \cdot a$. Diremo che p è il tipo generico della classe laterale $H \cdot a$.

Definizione 3.1.16. Sia G un gruppo stabile. Allora, per il Lemma 3.1.14, esiste un unico tipo "globale" generico in G, che estende "$x \in G_0$" e si chiama *principale generico* di G.

Osservazione 3.1.17. Se indichiamo con p_0 il principale generico di G, allora per i Lemmi 3.1.7 e 3.1.14 applicati allo spazio (G, G), per ogni tipo generico $p \in \mathcal{O}_G$ esiste $g \in G$ tale che $p = g \cdot p_0$.

Osservazione 3.1.18. Il Lemma 3.1.14 ha una versione più debole per spazi omogenei (in generale non principali). Se (G, V) è uno spazio omogeneo e $p \in S(\bar{M})$ è un tipo "globale" che estende $V(x)$, allora p è generico in V se e solo se $Stab(p) \supseteq G_0$. Per ulteriori dettagli si può consultare il Lemma 6.16 in [4].

3.2 Gruppi Weakly Normal

In questo paragrafo si specializzano alcuni risultati al caso di gruppi Weakly Normal. Si mostra che un gruppo Weakly Normal è virtualmente abeliano.

Inziamo questo paragrafo studiando ancora un pò il caso generale dei gruppi stabili.

Osservazione 3.2.1. Sia (G, V) uno spazio principale omogeneo (o anche uno spazio omogeneo). Sia ϕ una formula e sia X l'insieme dei ϕ-tipi $p \restriction \phi \in S_\phi(\bar{M})$ tali che p è un tipo "globale", generico in V. Allora, guardando le dimostrazioni dei Lemmi 3.1.13 e 3.1.14, si ottiene che X è finito. Infatti, sia p un tipo generico in V. Se indichiamo con $\phi'(x; y, z)$ la formula $\phi(y \cdot x, z)$ e se poniamo $H = Stab_{\phi'}(p)$ (vedi 3.1.13), allora per il Lemma 3.1.14, H ha indice finito in G. Dal fatto che G agisce transitivamente sui generici di V, segue che le classi laterali di H in G sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei ϕ'-tipi generici in V. Allora tali tipi sono in numero finito e quindi X è finito.

Lemma 3.2.2. *Sia G un gruppo stabile type-definibile su un insieme di parametri A. Allora esiste un gruppo H definibile su A tale che:*

1. *G è un sottogruppo di H ;*

2. *G è l'intersezione di una famiglia $\{H_i : i < |T|\}$ di sottogruppi di H, A-definibili.*

Dimostrazione. Diamo solo l'idea della dimostrazione rimandando al Lemma 6.18 in [4] per i dettagli.
(1) Per semplicità assumiamo che G sia l'insieme di soluzione di un tipo parziale $\Phi(x)$ sul $\emptyset$. Per compattezza, esiste una formula $\phi_0(x)$ in $\Phi(x)$ tale che se a, b, c soddisfano ϕ_0 allora $a \cdot (b \cdot c)$ e $(a \cdot b) \cdot c$ sono definiti e uguali ed inoltre $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Per ogni $\phi \in \Phi$, sia $\delta_\phi(x, y)$ la formula $\phi(y \cdot x) \wedge \phi_0(x) \wedge \phi_0(y)$. Per l'Osservazione 3.2.1, esistono un numero finito di δ_ϕ-tipi generici in G. Sia $\varepsilon_\phi(y)$ la congiunzione di tutte le δ_ϕ-definizioni di tali tipi. Allora $\varepsilon_\phi(y)$ è $\emptyset$-definibile e risulta:

$$\Phi(x) \equiv \{\phi_0(x)\} \cup \{\varepsilon_\phi(x) : \phi \in \Phi\} \tag{3.1}$$

Per compattezza, esiste una congiunzione finita $\bar{\phi} \in \Phi$ tale che $\bar{\phi}$ implica la parte destra in (3.1) e in particolare $\bar{\phi} \models \phi_0 \wedge \varepsilon_{\bar{\phi}}$. Quindi se a, b soddisfano $\phi_0 \wedge \varepsilon_{\bar{\phi}}$, per (3.1), $a \cdot b$ soddisfa ϕ_0.
Claim: Se b soddisfa $\phi_0 \wedge \varepsilon_{\bar{\phi}}$ e se $a \in G$, allora $b \cdot a$ soddisfa $\phi_0 \wedge \varepsilon_{\bar{\phi}}$.
Sia ora H_0 l'insieme definito da $\phi_0(x) \wedge \varepsilon_{\bar{\phi}}(x)$. Allora, per (3.1), $G \subseteq H_0$. Sia $H_1 = \{a \in H_0 : \forall b \in H_0,\ b \cdot a \in H_0\}$. Allora H_0 e H_1 sono entrambi $\emptyset$-definibili ed inoltre, per il claim, $G \subseteq H_1$. Poniamo:

$$H = \{a \in H_1 : \exists b \in H_1,\ a \cdot b = 1\} .$$

Allora H è un gruppo $\emptyset$-definibile e $G \subseteq H$ perchè $G \subseteq H_1$ ed ogni $a \in G$ ha un inverso in G (e quindi in H_1).
(2) Per ogni $\psi \in \Phi$ tale che $\psi(x) \models H$, rimpiazzando ϕ_0 con ψ nella dimostrazione del punto (1), possiamo trovare un sottogruppo H_ψ tale che $G \subseteq H_\psi \subseteq H$. Allora G è intersezione degli H_ψ e per il Lemma 3.1.2, G è intersezione di al più $|T|$ sottogruppi. □

Osservazione 3.2.3. Segue dal Lemma 3.2.2 che se G è un gruppo stabile definibile su di un insieme A e se H è un sottogruppo di G, type-definibile su A, allora H è intersezione di al più $|T|$ sottogruppi di G, A-definibili.

Lemma 3.2.4. *Sia H un gruppo stabile. Allora H ha una "base canonica" $[H]$, cioè esiste un insieme di parametri $A = [H]$ tale che, per ogni automorfismo α di $\bar{M}$, α fissa H come insieme se e solo se α fissa $[H]$ puntualmente.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.2.2, H è intersezione di una famiglia di gruppi definibili $\{H_i : i \in I\}$, dove $|I| \leq |T|$. Per ogni $i \in I$, sia Λ_i l'insieme dei gruppi definiti da istanze delle formule che definiscono H_i (cioè, le formule per l'insieme e per l'operazione di gruppo) e tali che per ogni $K \in \Lambda_i$, $H_i \cap K \neq \emptyset$. Per il Lemma 3.1.2, $\bigcap \Lambda_i$ equivale ad una sotto-intersezione finita che indichiamo con K_i. Allora se indichiamo con $G_i = H_i \cap K_i$, risulta $H = \bigcap\{G_i : i \in I\}$. L'insieme dei parametri canonici (cioè, dei codici) per gli insiemi definibili G_i è l'insieme cercato. □

Sia (G, V) uno spazio omogeneo. Siano $a \in V$ ed A un insieme di parametri tali che $tp(a/A)$ è stazionario. Per il Lemma 3.1.13, $H = Stab(tp(a/A))$ è un sottogruppo di G, type-definibile su $Cb(tp(a/A)) \subseteq acl^{eq}(A)$. Quindi, in generale, la classe laterale $H \cdot a$ è un insieme ∞-definibile su $acl^{eq}(A) \cup \{a\}$.

Lemma 3.2.5. *Sia G un gruppo stabile type-definibile su $\emptyset$. Siano $a \in G$ ed A un insieme di parametri tale che $tp(a/A)$ è stazionario. Sia $H = Stab(tp(a/A))$. Supponiamo che la classe laterale $H \cdot a$ sia $acl^{eq}(A)$-definibile (cioè, type-definibile su $acl^{eq}(A)$). Allora:*

1. *H è connesso ;*
2. *$tp(a/A)$ è il tipo generico della classe laterale $H \cdot a$ (rispetto allo spazio omogeneo principale $(H, H \cdot a)$).*

Dimostrazione. Iniziamo osservando un fatto, conseguenza immediata del Lemma 3.1.13.
Claim: Se $b \in H$ è tale che b è indipendente da a su A, allora $tp(b \cdot a/A) = tp(a/A)$.
dim. Per applicare la parte (2) del Lemma 3.1.13 e concludere è sufficiente osservare che se b è indipendente da a su A allora $tp(a/A \cup \{b\}) = tp(a/A) \mid A \cup \{b\}$.

Sia H_0 la componente connessa di H con riferimento allo spazio omogeneo principale (H, H). Allora H_0 è type-definibile su $acl^{eq}(A)$. Per il Lemma 3.1.14 esiste un unico tipo p generico globale in H che estende $H_0(x)$. Per il Lemma 3.1.7, p è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile. Sia $b \in H_0$ una realizzazione di $p \upharpoonright acl^{eq}(A \cup \{a\})$. Allora, per transitività e simmetria, a è indipendente da b su A e per il claim di sopra $tp(b \cdot a/A) = tp(a/A)$. Consideriamo la classe laterale $H_0 \cdot a$. Dal fatto che $H_0 \cdot a$ è $acl^{eq}(A)$-definibile segue che, applicando il Lemma 3.1.9, $tp(b \cdot a/A)$ è il tipo generico di $H_0 \cdot a$ e quindi $tp(a/A)$ è il tipo generico di $H_0 \cdot a$.

Supponiamo ora che H non sia connesso e scegliamo $c \in H - H_0$ tale che c è indipendente da a su A (ad esempio possiamo scegliere un c che realizza la restrizione ad $A \cup \{a\}$ di un generico di H che estende un'orbita non banale di H_0). Dal fatto che $c \cdot a \notin H_0 \cdot a$, segue $tp(c \cdot a/A) \neq tp(a/A)$ e questo contraddice il claim di sopra. Quindi H è connesso e $tp(a/A)$ è il tipo generico della classe laterale $H_0 \cdot a$ rispetto allo spazio omogeneo principale $(H, H \cdot a)$. □

Definizione 3.2.6. Diciamo che un gruppo G è *Weakly Normal* se G è type-definibile nel modello saturo $\bar{M}$ della teoria stabile e 1 based T.

Il seguente teorema mostra come, se G è un gruppo Weakly Normal, allora le ipotesi del Lemma 3.2.5 sono garantite. La dimostrazione è piuttosto tecnica e, forse, un pò difficile da seguire. La presentiamo in quanto questo teorema è di fondamentale importanza per i risultati del Paragrafo 3.3, comunque la si può trovare in Proposizione 4.5 in [4]. Una dimostrazione leggermente diversa è presente in [6].

Teorema 3.2.7. *Sia G un gruppo Weakly Normal. Siano $a \in G$ ed A un insieme di parametri tale che $tp(a/A)$ è stazionario. Sia $H = Stab(tp(a/A))$ lo stabilizzatore sinistro di p. Allora:*

1. *H è connesso e type-definibile su $acl^{eq}(\emptyset)$;*
2. *$tp(a/A)$ è il tipo generico della classe laterale destra $H \cdot a$ di H in G (rispetto allo spazio principale omogeneo $(H, H \cdot a)$).*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste sostanzialmente nel provare che se G è un gruppo Weakly Normal, allora le ipotesi del Lemma 3.2.5 sono soddisfatte. Quindi, per ottenere la tesi, è sufficiente provare che :

(i) $X = H \cdot a$ è type-definibile su $acl^{eq}(A)$;

(ii) H è type-definibile su $acl^{eq}(\emptyset)$.

(i) Sia $b \in G$ una realizzazione della restrizione ad $A \cup \{a\}$ di un generico di G che non contiene "$x \in G_0 \cdot a$". Allora, dato che $tp(b/A \cup \{a\})$ è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile, b è indipendente da a su A e, per simmetria, a è indipendente da b su A. Quest'ultima condizione vuol dire proprio che a realizza $tp(a/A) \mid A \cup \{b\}$. Sia M un modello contenente $A \cup \{b\}$, tale che a è indipendente da M su A (cioè, $tp(a/M)$ è l'estensione non-forking di $tp(a/A)$ ad M).
Claim 1: Se α è un $acl^{eq}(A)$-automorfismo di M, allora α fissa $tp(b \cdot a/M)$ se e solo se α fissa $b \cdot H$ come insieme.
dim. Osserviamo che, per definizione, H è lo stabilizzatore di $tp(a/M)$ e, sia H che $tp(a/M)$ sono definibili su $acl^{eq}(A)$ ($tp(a/M)$ perchè è un'estensione non-forking di $tp(a/A)$ e H per il Lemma 3.1.13). In particolare, α fissa $tp(a/M)$ e H. Allora otteniamo, $\alpha(tp(b \cdot a/M)) = tp(b \cdot a/M)$ sse $tp(\alpha(b) \cdot$

$a/M) = tp(b \cdot a/M)$ sse $tp(b^{-1} \cdot \alpha(b) \cdot a/M) = tp(a/M)$ sse $b^{-1} \cdot \alpha(b) \in H$ sse $\alpha(b) \cdot H = b \cdot H$ sse $\alpha(b \cdot H) = b \cdot H$ (come insieme).

Dal claim e dal Lemma 3.2.4, otteniamo che $tp(b \cdot a/M)$ è definibile su $acl^{eq}(A) \cup [b \cdot H]$ e inoltre $[b \cdot H]$ è precisamente $Cb(tp(b \cdot a/M))$ dopo aver aggiunto costanti al linguaggio per gli elementi di $acl^{eq}(A)$. Per il Corollario **??**, G rimane un gruppo Weakly Normal dopo aver aggiunto tali costanti. Quindi otteniamo:

$$[b \cdot H] \subseteq acl^{eq}(A \cup \{b \cdot a\}) \tag{3.2}$$

Dato che b è generico in G su $A \cup \{a\}$, per il Lemma 3.1.8, a è indipendente da $b \cdot a$ su A e quindi, per (3.2), $tp(a/A \cup \{b \cdot a\} \cup [b \cdot H])$ è $acl^{eq}(A)$-definibile (e in particolare definibile su $acl^{eq}(A) \cup [b \cdot H]$). Allora, per simmetria, $tp(b \cdot a/A \cup \{a\} \cup [b \cdot H])$ è definibile su $acl^{eq}(A) \cup [b \cdot H]$. Quindi, $tp(b \cdot a/M)$ e $tp(b \cdot a/A \cup \{a\} \cup [b \cdot H])$ sono entrambi estansioni non-forking di $tp(b \cdot a/A \cup [b \cdot H])$ (cioè, sono paralleli). Sia $q \in S(\bar{M})$ la loro comune estensione non-forking "globale". Osserviamo che claim 1 implica in particolare che $b \cdot H$ è M-definibile.
Claim 2: $H \cdot a$ è M-definibile.
dim. Sia α un automorfismo di $\bar{M}$ che fissa M puntualmente. Allora $\alpha(q) = q$ (in quanto in particolare q è M-definibile). Dato che $tp(b \cdot a/A \cup \{a\} \cup [b \cdot H])$ è contenuto in q, ne segue che il tipo parziale "$x \in b \cdot H \cdot a$" è contenuto in q e quindi, dato che $b \cdot H$ è M-definibile, "$x \in b \cdot H \cdot \alpha(a)$" è in $\alpha(q)$ e quindi in q $(\alpha(q) = q)$. Allora $b \cdot H \cdot a = b \cdot H \cdot \alpha(a)$ e quindi $H \cdot a = H \cdot \alpha(a)$, cioè $H \cdot a = \alpha(H \cdot a)$ e $H \cdot a$ è M-definibile.

Segue dal claim 2 che, dato che $H \cdot a$ è $acl^{eq}(A \cup \{a\})$-definibile, $[H \cdot a] \subseteq M \cap dcl^{eq}(acl^{eq}(A) \cup \{a\}$. Ma a è indipendente da M su $acl^{eq}(A)$, quindi $M \cap dcl^{eq}(acl^{eq}(A) \cup \{a\} = acl^{eq}(A)$. Questo prova che $H \cdot a$ è $acl^{eq}(A)$-definibile (cioè, type-definibile su $acl^{eq}(A)$).
(ii) Continuando con le notazioni del punto (i), dato che $tp(a/A \cup \{b\})$ è un'estensione non-forking di $tp(a/A)$, per definizione, $H = Stab(tp(a/A \cup \{b\}))$ e quindi chiaramente $H = Stab(tp(b \cdot a/A \cup \{b\}))$. Per il Lemma 3.1.13, H è type-definibile su $Cb(tp(b \cdot a/A \cup \{b\})) \subseteq acl^{eq}(b \cdot a)$ (perchè G è 1 based). Quindi $[H] \subseteq acl^{eq}(A) \cap acl^{eq}(b \cdot a)$. Ma b è generico in G su $A \cup \{a\}$ e quindi $b \cdot a$ è indipendente da A sul $\emptyset$ (Lemma 3.1.7). Quindi $acl^{eq}(A) \cap acl^{eq}(b \cdot a) = acl^{eq}(\emptyset)$ e H è type-definibile su $acl^{eq}(\emptyset)$. □

Un gruppo G si dice *virtualmente abeliano* (abelian-by-finite) se G ha un sottogruppo abeliano e di indice finito.

Teorema 3.2.8. *Se G è un gruppo Weakly Normal, allora G è virtualmente abeliano.*

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo il seguente fatto.
Claim: Sia $n < \omega$. Se G è un gruppo Weakly Normal, allora ogni sottogruppo connesso e type-definibile di G^n è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile.
dim. Senza perdere di generalità supponiamo che G sia definito sul $\emptyset$. Allora G^n è un gruppo Weakly Normal definito sul $\emptyset$. Se H è un sottogruppo type-definibile e connesso, allora esiste un unico tipo generico p in H (Lemma 3.1.14). Per il Teorema 3.2.7, $H = Stab(p)$ è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile.

Consideriamo la componente connessa G_0 di G (sottogruppo normale per il Corollario 3.1.11). Allora G_0 è un gruppo Weakly Normal, definito sul $\emptyset$. Mostriamo che G_0 è abeliano. Per ogni $g \in G$ indichiamo con Inn_g l'automorfismo di coniugio tramite g ristretto a G_0. Allora il grafico di Inn_g è un sottogruppo connesso e type-definibile di $G_0 \times G_0$. Per il claim di sopra, Inn_g è $acl^{eq}(\emptyset)$-definibile e quindi:

$$tp(g/acl^{eq}(\emptyset)) = tp(g'/acl^{eq}(\emptyset)) \Rightarrow \; Inn_g = Inn_{g'} \; . \tag{3.3}$$

Siano g, g' generici in G_0 sul $\emptyset$ e indipendenti sul $\emptyset$. Allora $tp(g/acl^{eq}(\emptyset)) = tp(g'/acl^{eq}(\emptyset))$ e quindi per (3.3), per ogni $h \in G_0$, $g^{-1}hg = g'^{-1}hg'$, cioè $g' \cdot g^{-1} \in Z(G_0)$ (centro di G_0, sottogruppo relativamente $\emptyset$-definibile). Dato che $g' \cdot g^{-1}$ è generico in G_0 sul $\emptyset$, il sottogruppo $Z(G_0)$ è un insieme generico in G_0 e quindi, per ogni g generico in G_0 sul $\emptyset$, $g \in Z(G_0)$ (perchè $Z(G_0)$ è $\emptyset$-definibile).

Sia ora $a \in G_0$ e sia g generico in G_0 sul $\emptyset$. Allora, per il Lemma 3.1.14, il tipo di g estende "$x \in G_0 \cdot a$" e quindi esiste g' in G_0 tale che $g = g' \cdot a$. Ma $a^{-1} \in G_0$ e G_0 è lo stabilizzatore del tipo di g. Quindi g' è generico in G_0. Questo prova che ogni elemento in G_0 è un prodotto di elementi generici sul $\emptyset$ e quindi $G_0 = Z(G_0)$ è abeliano.

Indichiamo con $C_G(G_0)$ il centralizzatore di G_0 in G. Allora $H = Z(C_G(G_0))$ è un sottogruppo di G abeliano relativamente definibile e contenente G_0. Quindi, per il Corollario 3.1.11, H ha indice finito in G. □

3.3 Gruppi interpretabili in gruppi Weakly Normal

In questo paragrafo si studiano i gruppi interpretabili in strutture le cui teorie sono Weakly Normal. Mostriamo che se un gruppo G è interpretabile in una struttura H tale che $Th(H)$ è Weakly Normal allora G è virtualmente abeliano. Dimostriamo il Teorema 1 in [7] e mostriamo come si applica per caratterizzare i gruppi interpretabili in $(\mathbb{Z}, +)$. In particolare deduciamo che il gruppo additivo dei razionali non è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.

Ricordiamo che un gruppo G si dice *virtualmente abeliano* (abelian-by-finte) se G ha un sottogruppo abeliano e di indice finito.

Lemma 3.3.1. *Sia H una struttura tale che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal. Se un gruppo G è interpretabile in H, allora G è virtualmente abeliano.*

Dimostrazione. Se G è interpretabile in H allora, a meno di isomorfismi, G è un gruppo definibile in H^{eq}. Per il Corollario 2.4.29, G è un gruppo Weakly Normal. Quindi, per il Teorema 3.2.8, G è virtualmente abeliano. □

Teorema 3.3.2. *(A Group in a Group) Sia H un gruppo tale che $Th(H)$ è una teoria Weakly Normal. Sia G un gruppo interpretabile in H. Allora G ha un sottogruppo definibile di indice finito, definibilmente isomorfo a un quoziente A/B dove A, B sono sottogruppi definibili di H^n.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo interpretabile in H. Senza perdere di generalità assumiamo che G sia un gruppo definibile in una sorte S_E di H^{eq} dove E è una relazione di equivalenza $\emptyset$-definibile su H^n. Fissiamo un modello $\bar{H}$ k-saturo e fortemente k-omogeneo della teoria stabile e 1 based $Th(H)$, per un cardinale "grande" k. Possiamo quindi considerare il gruppo $\bar{G}$ definito dalle stesse formule di G "calcolate" nell'espansione $\bar{H}^{eq}$ di $\bar{H}$. In particolare $\bar{G}$ è ancora un gruppo Weakly Normal definito nella sorte S_E di $\bar{H}^{eq}$.

Sia $b \in \bar{G}$ una realizzazione della restrizione su $acl^{eq}(\emptyset)$ del principale generico di $\bar{G}$, cioè dell'unico generico di $\bar{G}$ che estende "$x \in \bar{G}_0$", dove $\bar{G}_0 \leq \bar{G}$ è il sottogruppo type-definibile, intersezione di tutti i sottogruppi definibili e di indice finito in $\bar{G}$ (vedi Definizione 3.1.16). Sia $c \in \bar{H}^n$ tale che

$$c/E = b \tag{3.4}$$

e consideriamo $q = stp(c, b)$ (cioè $tp(c, b/acl^{eq}(\emptyset))$). Il gruppo $\bar{H}^n \times \bar{G}$ è Weakly Normal e quindi, per il Teorema 3.2.7, posto $K = Stab(q)$ risulta:

1. K è un sottogruppo di $\bar{H}^n \times \bar{G}$ connesso e type-definibile su $acl^{eq}(\emptyset)$;

2. q è il tipo generico della classe laterale $K \cdot (c, b)$.

Denotiamo con $\pi_2(K)$ la seconda proiezione a fattore di K. Allora $\pi_2(K) = G_0$. Infatti, dal fatto che $G_0 = Stab(stp(b))$, segue che $G_0 \subseteq \pi_2(K)$ e, dato che $\pi_2(K)$ è connesso (perchè K è connesso), i due sottogruppi devono coincidere. Sia $L = \pi_1(K)$.
Claim:$(L \times G_0) \cap K$ è il grafico di una funzione suriettiva dal sottogruppo type-definibile $L \leq \bar{H}^n$ su G_0.
dim. Se $(1, y) \in K$ allora (c, yb) realizza q (K è lo stabilizzatore di q), ma q

contiene la formula (3.4) e quindi $yb = b$, cioè $y = 1$. Questo prova che, se (x, y_1) e (x, y_2) sono in K, allora $y_1 = y_2$. Quindi risulta definita la funzione f che ad ogni $x \in L$ associa l'unico $y \in G_0$ tale che $(x, y) \in K$. Dato che K è un sottogruppo, f risulta un omomorfismo suriettivo. Questo prova il claim.

Per compattezza, usando anche l'Osservazione 3.2.3, esiste un sottogruppo definibile $A \leq H^n$, un gruppo definibile e di indice finito $G' \leq G$ (in quanto contiene G_0) e un omomorfismo suriettivo definibile $f : A \to G'$. Quindi, posto B=Ker(f), i sottogruppi A, B, G' hanno le proprietà richieste. □

Osservazione 3.3.3. Tutto ciò che nel Teorema 3.3.2 è definibile, a priori, è definibile in $Th(H)$. Sappiamo sicuramente che il sottogruppo di indice finito G' è definibile in $Th(H)$. Quello che non sappiamo è se G' è definibile in $Th(G)$, ma non importa. Quello che succede è che quando un gruppo G viene interpretato nella teoria Weakly Normal, esso riceve un rafforzamento della sua struttura che ne determina la forma esposta nel Teorema 3.3.2.

Si è visto nella sezione precedente che $Th(\mathbb{Z})$ è una teoria stabile e 1 based (Corollario 2.5.6). Quindi applicando questo teorema al caso $H = \mathbb{Z}$ si ottiene il seguente corollario che caratterizza i gruppi interpretabili in $(\mathbb{Z}, +)$. Ricordiamo che un gruppo G si dice un'estensione finita di un gruppo H se H è un sottogruppo normale e di indice finito in G.

Teorema 3.3.4. *Un gruppo G è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$ se e solo se G è isomorfo ad un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato.*

Dimostrazione. Si è già visto, Corollario 1.3.8, che un'estensione finita di un gruppo abeliano finitamente generato è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$. Viceversa, sia G un gruppo interpretabile in questa struttura. Allora per Teorema 3.3.2 G ha un sottogruppo definibile G' abeliano finitamente generato e di indice finito. L'intersezione $N(G')$ di tutti i coniugati di G' è un sottogruppo normale di G. Dato che G' ha indice finito, $N(G')$ è uguale all'intersezione di un numero finito di tali coniugati e in particolare ha indice finito in G. Allora $N(G')$ è un sottogruppo abeliano finitamente generato, normale e di indice finito. □

Corollario 3.3.5. *Il gruppo additivo dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, +)$ non è interpretabile in $(\mathbb{Z}, +)$.*

Bibliografia

[1] Mike Prest, *Model Theory and Modules*, Cambridge University Press (1988).

[2] Wilfrod Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press (1993).

[3] Anand Pillay, *An Introduction to Stability Theory*, Dover Publications Inc. (2008).

[4] Anand Pillay, *Geometric Stability Theory*, Clarendon Press, Oxford (1996).

[5] John T. Baldwin, *Foundamental of Stability Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1988).

[6] Ehud Hrushovski and Anand Pillay, *Weakly normal groups*, in : Logic Colloquium '85, North Holland (1987), pp. 233-244.

[7] David Evans, Anand Pillay and Bruno Poizat, *A Group in a Group*, in : Algebra i Logika, No. 3, pp. 368-378, May-June (1990).

[8] A. Pillay and G. Srour, *Closed sets and chain conditions in stable theories*, Journal of Symbolic Logic, 49 (1984), 1350-1362.

[9] Howard Hiller, *Crystallography and Cohomology of Groups*, December 1986, pp. 765-779.

[10] Markus Junker, *A note on equational theory*, The journal of symolic logic, Volume 65, Numero 4, (Dic. 2000).

[11] A. Berarducci, Y. Peterzil e A. Pillay, *Group covers, o-minimality, and categoricity*, Confluentes Mathematici, Vol. 2, No. 4 (2010) 473-496, World Scientific Publishing Company.

[12] A. Berarducci, *Corso di Teoria dei Modelli*, 4-9 Settembre 2006, pp. 1-28.

[13] A. Pillay, *Lecture Notes-Stability Theory*, September 29, 2003, pp. 1-73.

[14] A. Pillay, *Lecture Notes-Model Theory*, December 9, 2002, pp. 1-61.